Esercizi: fascicolo 3

Esercizio 1 In una procedura di controllo di produzione, n processori prodotti da un processo industriale vengono sottoposti a controllo. Si assuma che ogni pezzo, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $p \in (0,1)$ di essere difettoso. Se un processore è funzionante supera sicuramente il test di controllo, se il processore è difettoso fallisce il test con probabilità $q \in (0,1)$, indipendentemente dagli altri. Sia X = numero di processori che hanno fallito il test. Determinare la distribuzione di X.

Esercizio 2 Due dadi truccati sono tali che la probabilità di ottenere un sei è il doppio della probabilità di ottenere ogni altro punteggio. Qual è la media del punteggio ottenuto lanciando i due dadi?

Esercizio 3 Da un'urna contenente r palline rosse e v palline verdi, si estraggono successivamente, senza reintroduzione, k palline, con $k \leq \min(r, v)$. Per $i = 1, 2, \ldots, k$, sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e $X = X_1 + \cdots + X_k$.

a. Determinare la distribuzione di X.
b. Determinare le distribuzioni delle X_i.
c.* Mostrare che la densità congiunta delle X_i è data da

$$p_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{r(r-1)\cdots(r - \sum_{i=1}^k x_i + 1)v(v-1)\cdots(v - k + \sum_{i=1}^k x_i + 1)}{(r+v)(r+v-1)\cdots(r+v-k+1)}$$

d. Calcolare $E(X)$.

Esercizio 4 Un'urna contiene $n \geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute *senza reimmissione*. Introduciamo la variabile casuale

$$X \;=\; \text{numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa,}$$

la cui densità discreta verrà indicata con $p_X(k) = P(X = k)$.

a) Mostrare che, per $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$p_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n - k + 1).$$

b) Calcolare $E(X)$ (ricordare le formule $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, valide per ogni $n \geq 1$).

Esercizio 5 Per $n \geq 1$, sia X_n una variabile casuale che assume, con la stessa probabilità, i valori $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$. Se f è una funzione continua, sia

$$m_n = E(f(X_n)).$$

Mostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} m_n = \int_0^1 f(x)dx.$$

Esercizio 6 Siano X_1, X_2 variabili uniformi discrete sull'insieme $\{1, \ldots, n\}$, dove $n \in \mathbb{N}$, tra loro indipendenti. Definiamo la variabile $Y := \min\{X_1, X_2\}$.

a) Si calcoli $P(Y = k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

b) Si mostri che, per ogni $t \in (0, 1)$, si ha che

$$\lim_{n \to \infty} P(Y \leq tn) \;=\; 2t - t^2 \,.$$

Esercizio 7 Siano X, Y variabili casuali a valori in $\mathbb{N}$, definite sullo stesso spazio di probabilità. Giustificare l'identità

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = n - k).$$

Esercizio 8 * Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$. Allora

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Esercizio 9 Siano X, Y variabili aleatorie discrete, a valori in $\mathbb{N}$, con densità congiunta

$$p_{X,Y}(n, m) = c \frac{\lambda^n \mu^m \nu^{nm}}{n!m!}$$

dove $\lambda, \mu > 0$, $0 < \nu \leq 1$, e c è un'opportuna costante (quella per cui $\sum_{n,m} p_{X,Y}(n, m) = 1$).

a. Calcolare le densità marginali di X e Y.

b. Calcolare le probabilità condizionate $P(X = n|Y = m)$.

c.* Mostrare che gli eventi $\{X = n\}$, $\{Y = m\}$ sono indipendenti per ogni coppia $n, m \in \mathbb{N}$ se e solo se $\nu = 1$.

Esercizio 10 Si consideri la seguente classica strategia per il gioco della roulette. Gioco sempre sul rosso. Alla prima giocata punto un dollaro. Se perdo raddoppio la giocata, se vinco smetto. In ogni caso, dato che il mio capitale iniziale è 1023 dollari, se perdo 10 volte di seguito devo smettere. Sia X la differenza tra il mio capitale alla fine del gioco e il capitale iniziale. Calcolare $E(X)$.

Esercizio 11 Un gioco a premi ha un montepremi di 512\$. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si da alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente ad una domanda con probabilità $p \in (0, 1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita di questo concorrente.

a. Determinare la densità p_X di X.

b.* Calcolare $E(X)$

Esercizio 12 In un concorso vengono assegnate le idoneità per un dato servizio. Si assuma che ogni partecipante, indipendentemente dagli altri, abbia probabilità $p = \frac{3}{4}$ di ottenere l'idoneità. Al termine del concorso, a 10 tra gli idonei viene assegnato un posto di lavoro (se gli idonei sono meno di 10 vengono assegnati tanti posti di lavoro quanti sono gli idonei). Supponiamo che al concorso partecipino 15 persone, e sia X il numero dei partecipanti che ottengono l'idoneità ma non il posto di lavoro.

a. Determinare la distribuzione di X.

b. Calcolare $E(X)$.

Esercizio 13 Si considerino 5 urne identiche, ognuna contenente una pallina rossa e quattro palline verdi. Ogni urna viene assegnata ad uno di cinque giocatori, e ogni giocatore estrae una pallina dalla propria urna. Un montepremi di 3000 Euro viene diviso tra i giocatori che estraggono la pallina rossa.

a. Sia X il numero di Euro vinti da ogni giocatore vincente ($X = 0$ se nessun giocatore estrae la pallina rossa). Determinare la densità e la media di X.

b. Si supponga di considerare uno dei cinque giocatori, chiamiamolo Tizio, e sia Y il numero di Euro vinti da Tizio. Si determinino la densità e la media di Y.

Esercizio 14 Si sceglie "a caso" un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Determinare la densità discreta di X.

Esercizio 15 Sia $N \geq 2$ e sia Ω l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di $\{1, 2, \ldots, N\}$. In altre parole

$$\Omega := \{\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} : \omega \neq \emptyset\}.$$

Se $\omega \in \Omega$ sia $X(\omega) := \max(\omega)$ il massimo elemento di ω e $Y(\omega) := \min(\omega)$ il minimo elemento di ω. Infine, sia P la probabilità uniforme su Ω.

i) Mostrare che, per $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$,

$$P(X = n) = \frac{2^{n-1}}{2^N - 1}.$$

ii) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di X.

iii) Determinare la densità congiunta di (X, Y).

iv)* Determinare la densità di $X - Y$.

Esercizio 16 Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e indichiamo con S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$, munito della probabilità P uniforme. Gli elementi di S_n saranno indicati con $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$. Introduciamo le variabili casuali scalari X, Y definite su S_n:

$$X(\sigma) := \sigma(1), \qquad Y(\sigma) := \sigma(2).$$

1. Si mostri che, per ogni $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la densità congiunta di (X, Y) è data da

$$p_{X,Y}(i, j) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_n} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases},$$

dove c_n è un'opportuna costante che è richiesto di determinare.

2. (*) Si determini la densità della variabile $D := Y - X$.
   [*Sugg:* basta calcolare $p_D(m)$ per $m > 0$, poiché per simmetria $p_D(-m) = p_D(m)$.]

Indichiamo ora con Z, W due variabili casuali scalari indipendenti, definite su un altro spazio di probabilità $(\Omega, \widetilde{P})$, ciascuna con distribuzione uniforme nell'insieme $\{1, \ldots, n\}$: in altri termini, $\widetilde{P}(Z = i) = \frac{1}{n}$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, e analogamente per W.

3. Si calcoli $\widetilde{P}(Z \neq W)$.

4. Si mostri che, per ogni $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si ha che $\widetilde{P}(Z = i, W = j \,|\, Z \neq W) = p_{X,Y}(i, j)$.

Esercizio 17 Siano W, T variabili casuali indipendenti, con la seguente distribuzione:

$$P(T = 0) \;=\; P(T = 1) \;=\; \frac{1}{2}, \qquad P(W = n) \;=\; p\,(1 - p)^{n-1}\,,\ \forall n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}\,,$$

dove $p \in (0, 1)$ è un parametro fissato. In altri termini, $T \sim Be(\frac{1}{2})$ mentre $W - 1 \sim Ge(p)$.

Definiamo la variabile

$$X \;:=\; W\,\mathbf{1}_{\{T=0\}} \;+\; \frac{1}{W}\,\mathbf{1}_{\{T=1\}}\,,$$

che può dunque assumere come valori i numeri naturali e i reciproci dei numeri naturali, ossia $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ (0 escluso).

1. Si determini la densità discreta di X.

2. Si mostri che la variabile $Y := 1/X$ ha la stessa distribuzione di X

3. Si calcoli $E(X)$.
   [Ricordiamo le relazioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1 - x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = (1 - x)^{-2}$, valide per $|x| < 1$.]

Esercizio 18 Lancio un dado regolare a sei facce una prima volta: se esce un numero in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ mi fermo, altrimenti rilancio il dado; se nel secondo lancio esce un numero in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ mi fermo, altrimenti rilancio il dado una terza volta; e così via.

Indichiamo con T il numero totale di lanci effettuati, con X_i il risultato dell'i-esimo lancio (per $i \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$) e con $Y := X_T$ il risultato dell'ultimo lancio.

1. Si determini la legge (cioè i valori assunti e la densità discreta) delle variabili T e X_i.

2. Per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, si esprima l'evento $\{T = n, Y = a\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$. Si calcoli dunque la densità congiunta delle variabili casuali (T, Y).

3. Si determini la legge di Y. Le variabili T e Y sono indipendenti?