Esercizi: fascicolo 4

Esercizio 1 Dimostrare le seguenti proprietà (1), (2) e (3):

$$\|X\|_1 = 0 \iff X \equiv 0; \tag{1}$$

$$X \in L^1(\Omega, P),\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \|\lambda X\|_1 = |\lambda| \|X\|_1; \tag{2}$$

$$X, Y \in L^1(\Omega, P) \ \Rightarrow \ \|X + Y\|_1 \leq \|X\|_1 + \|Y\|_1. \tag{3}$$

Esercizio 2 Si estraggono 3 biglie, senza reinserimento, da un'urna contenente 5 biglie rosse, 4 biglie bianche e 2 biglie verdi. Sia X il numero di biglie rosse estratte e Y il numero di biglie bianche estratte.

1. Scrivere la densità (discreta) di (X, Y).
2. Calcolare le densità marginali di X e Y e i valori attesi $E(X)$ ed $E(Y)$.
3. Calcolare la covarianza di X e Y.

Esercizio 3 Il piatto di una roulette contiene i numeri da 0 a 36. Consideriamo due possibili puntate: A) quella sui numeri pari: si vince se esce un numero pari tra 2 e 36, e in questo caso si riceve il doppio del capitale puntato (quindi si resta in attivo di una quantità uguale al capitale puntato); B) quella sulla prima dozzina: si vince se esce un numero tra 1 e 12, e in questo caso si riceve il triplo del capitale puntato (quindi si resta in attivo del doppio del capitale puntato).

Supponiamo di puntare contemporaneamente due Euro sui numeri pari, e un Euro sulla prima dozzina. Sia X il bilancio della giocata (capitale finale - capitale iniziale).

a) Determinare la densità di X e $E(X)$.

b) Si considerino le seguenti variabili casuali:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se esce un numero pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{se esce un numero della prima dozzina} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $Cov(Y, Z)$.

c) Dopo aver espresso X come funzione di Y e Z, calcolare $E(X)$ e $Var(X)$ senza usare la densità calcolata in a).

Esercizio 4 In un'urna vi sono r palline rosse e v palline verdi. Estraggo in successione due palline, senza reintroduzione. Per $i = 1, 2$, sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma pallina è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il coefficente di correlazione tra X_1 e X_2.

Esercizio 5 * Siano X, Y due variabili casuali che ammettono momento secondo, e sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

Si assuma, inoltre, che la matrice A abbia due autovalori distinti, e siano $v = \binom{v_1}{v_2}$, $w = \binom{w_1}{w_2}$ due autovettori linearmente indipendenti di A. Mostrare che le variabili casuali $Z = v_1 X + v_2 Y$ e $W = w_1 X + w_2 Y$ sono scorrelate.

Esercizio 6 Siano $X, Y \sim Be(p)$ indipendenti, con $p \in (0,1)$. Mostrare che le variabili casuali $X + Y$ e $X - Y$ sono scorrelate ma non indipendenti.

Esercizio 7 In un canale di trasmissione vengono trasmessi simboli binari. I disturbi sul canale fanno si che ogni simbolo trasmesso ha la probabilità del 2% di essere ricevuto errato, indipendentemente dagli altri simboli. I messaggi vengono trasmessi in "parole" composte da 50 simboli. Qual è la probabilità che una parola venga ricevuta con almeno due simboli errati? (Usare l'approssimazione di Poisson)

Esercizio 8 Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, tale che

$$P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{2k!}(1 + \lambda k),$$

con $\lambda > 0$.

a. Determinare il valore di λ

b. Sia $Y \sim Po(2)$. Mostrare che

$$P(X = k) = \frac{1}{2}[P(Y = k) + P(Y + 1 = k)].$$

c. Usando il risultato in b., calcolare media e varianza di X

Esercizio 9 Sia $\lambda > 0$ e $c : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ una funzione tale che $c(0) = 0$ e $\inf_{n>0} c(n) > \lambda$. Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$ con densità

$$p_X(n) = \begin{cases} \frac{1}{Z} & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{Z} \frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)} & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

dove $Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\cdots c(n)}$.

a. Mostrare che $E(c(X)) = \lambda$.

b. Mostrare che per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che la v.c. $f(X+1)$ ammette valor medio, si ha

$$E(c(X)f(X)) = \lambda E(f(X+1)).$$

c.* Si assuma che, per ogni $n \geq 0$, $|c(n+1) - c(n)| \leq 1$. Sia $Y \sim Po(\lambda)$. Mostrare, per induzione su k, che per ogni $k \geq 1$

$$E[c(X)^k] \leq E(Y^k).$$

(Sugg.: usare, dopo averla verificata, l'uguaglianza $E(Y^{k+1}) = \lambda \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E(Y^i)$)

Esercizio 10 a. Siano $X_1, X_2 \sim Po(\lambda)$ indipendenti. Fissati $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$, calcolare

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n). \tag{4}$$

b. Supponiamo che n sia fissato, e chiamiamo $q(k)$ il valore dell'espressione in (4). Mostrare che $q(\cdot)$ è il valore della densità di una variabile casuale binomiale, e determinarne i parametri.

c. Siano ora $X_1, X_2, \ldots, X_m \sim Po(\lambda)$ indipendenti, con $m > 2$. Calcolare

$$q_m(k) = P(X_1 = k | X_1 + X_2 + \cdots + X_m = n),$$

e determinare i parametri della variabile casuale binomiale la cui densità è $q_m(\cdot)$.

Esercizio 11 Siano X, Z e W variabili casuali indipendenti con $X \sim Be(p)$, $Z, W \sim Po(\lambda)$. Definiamo

$$Y = XZ + W.$$

a. Determinare le densità $p_{X,Y}$ e p_Y.

b. Utilizzando la densità calcolata al punto a., determinare $E(Y)$ e $Var(Y)$.

c. Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$ *senza* utilizzare p_Y.

Esercizio 12 Siano X e Y due variabili casuali a valori in $\mathbb{N}$ aventi la seguente densità congiunta:

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$ sono due parametri fissati.

a. Determinare le densità marginali di X e Y. Mostrare, in particolare, che $X \sim Po(p\lambda)$ e $Y \sim Po(\lambda)$.

b. Calcolare il coefficente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

Esercizio 13 Un'urna contiene 100 palline numerate da 0 a 99. Si estrae una pallina, e si denotano con X e Y le due cifre del numero estratto (la cifra delle decine, X, si considera uguale a zero per numeri minori di 10). Mostrare che X e Y sono indipendenti, e determinarne la distribuzione.

Esercizio 14 Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) Gli eventi A e B sono indipendenti.

ii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono indipendenti.

iii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono scorrelate (cioè $Cov(1_A, 1_B) = 0$).

Esercizio 15 Siano $X \sim Ge(p)$ e $Y \sim Ge(q)$, Determinare la densità di $\min(X, Y)$.

Esercizio 16 Siano $X, Y \sim Ge(p)$ indipendenti, $0 < p < 1$, e $Z := \max(X, Y)$.

a. Determinare la densità congiunta di (X, Z).

b. Posto $W := Z - X$, determinare la densità p_W di W.

c. Calcolare $E(W)$.

d. È vero o falso che X e W sono indipendenti?

Esercizio 17 Siano $X, Y \sim Ge(p)$ indipendenti, e si definisca $Z := \max(X, Y) - Y$.

a. Determinare la densità discreta di Z.

b. Determinare $E(Z)$ (sugg.: ricordare che $E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geq n)$, oppure usare la funzione generatrice dei momenti)

Esercizio 18 Sia X una variabile casuale che assume i valori 0 e 1 e Y una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, la cui densità congiunta è determinata dalle identità: per $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = n) &= p\frac{e^{-1}}{n!} \\ P(X = 1, Y = n) &= (1-p)e^{-2}\frac{2^n}{n!}. \end{aligned}$$

a. Determinare le densità marginali p_X e p_Y.

b. Calcolare la probabilità condizionata $P(X = 0|Y > 0)$.

c. Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.

d. Calcolare $Cov(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 19 Sia X una variabile casuale che assume i valori 0 e 1 e Y una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, la cui densità congiunta è determinata dalle identità: per $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = n) &= \tfrac{p}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n \\ P(X = 1, Y = n) &= \tfrac{1-p}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

a. Determinare le densità marginali p_X e p_Y.

b. Calcolare la probabilità condizionata $P(X = 0|Y > 0)$.

c. Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.

d. Calcolare $Cov(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 20 Sia $X_n \sim Po(n\lambda)$, e $Y_n = \frac{X_n - n\lambda}{n^{2/3}}$. Usando la Disuguaglianza di Chebischev mostrare che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \epsilon) = 0.$$

Esercizio 21 Siano $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, S\}$ variabili aleatorie indipendenti con le seguenti distribuzioni:

$$X_1 \sim X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda), \qquad Y_1 \sim Y_2 \sim \mathrm{Po}(\mu), \qquad S \sim \mathrm{Be}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{B}\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ sono parametri fissati, con $\lambda \neq \mu$. Introduciamo le variabili Z_1, Z_2 definite da

$$Z_1 := X_1 \mathbf{1}_{\{S=0\}} + Y_1 \mathbf{1}_{\{S=1\}}, \qquad Z_2 := X_2 \mathbf{1}_{\{S=0\}} + Y_2 \mathbf{1}_{\{S=1\}}.$$

In altre parole, lancio una moneta equilibrata (descritta dalla variabile S) e pongo $(Z_1, Z_2) := (X_1, X_2)$ se esce testa (cioè se $S = 0$) mentre pongo $(Z_1, Z_2) := (Y_1, Y_2)$ se esce croce ($S = 1$).

a) Calcolare $E(Z_1)$ e $E(Z_2)$.

b) Mostrare che Z_1 e Z_2 **non** sono indipendenti (sugg.: calcolare $E(Z_1 Z_2)$).

Esercizio 22 Ad un bambino vengono regalati N palloncini gonfiabili. Ognuno di questi palloncini rimane "integro", cioè non scoppia, un numero di giorni la cui distribuzione è geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Si considerino indipendenti le durate dei diversi palloncini. Per $n = 1, 2, \ldots$ denotiamo con X_n il numero di palloncini ancora integri dopo n giorni.

a. Qual è la distribuzione di X_n?

b. Sia T la variabile casuale a valori naturali tale che l'ultimo palloncino scoppia dopo il $T+1$-mo giorno. Calcolate $P(T > n)$ per ogni $n \geq 0$, e la densità discreta p_T di T.

c. Siano $1 \leq m \leq n$ e $0 \leq h \leq k \leq N$. Calcolare la probabilità condizionata

$$P(X_n = h | X_m = k).$$

d. Per ogni fissato $n \geq 1$, calcolare

$$P(X_n = N | X_{2n} = 0).$$

Esercizio 23 Siano $X_1, \ldots, X_n, T$ variabili casuali scalari indipendenti. Le variabili $X_1, \ldots, X_n$ hanno la stessa distribuzione, con $E(X_i) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, mentre la variabile T prende valori in $\{1, \ldots, n\}$.

a) Si spieghi perché, per $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, le variabili casuali X_i e $1_{\{T \geq j\}}$ sono indipendenti.

Si introduca la variabile S definita da

$$S := \sum_{i=1}^{n} X_i \, 1_{\{i \leq T\}} \, .$$

b) Si mostri che $E(S) = \mu \, E(T)$.

c) Si mostri che $\mathrm{Cov}(S, X_j) = \sigma^2 P(T \geq j)$, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Esercizio 24 Una compagnia di assicurazioni emette una polizza che pagherà n euro se l'evento E si verificherà entro un anno. Se la compagnia stima che l'evento E si verificherà entro un anno con probabilità p, quanto dovrebbe essere il costo della polizza per il cliente in modo che il profitto atteso per la compagnia sia $n/10$?

Esercizio 25 Una persona lancia una moneta equilibrata finchè non ottiene croce la prima volta. Se appare croce all'n-mo lancio, la persona vince 2^n euro. Denotiamo con X il guadagno del giocatore. Mostrare che $E(X) = +\infty$.

Esercizio 26 Sia $X \sim B(n, p)$. Mostrare che

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Esercizio 27 Sia $X \sim Po(\lambda)$. Quale valore k massimizza $P(X = k)$?

Esercizio 28 Sia $X \sim Po(\lambda)$. Mostrare che

$$E\left[X^n\right] = \lambda E\left[(X+1)^{n-1}\right].$$

Si utilizzi questo risultato per calcolare $E(X^3)$.

Esercizio 29 * Sia S un insieme di n elementi, $\Omega = \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$, e P la probabilità uniforme su Ω. Consideriamo la variabile casuale X definita da $X(\omega) = |\omega|$. Mostrare che

$$E(X) = \frac{n}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$Var(X) = \frac{n 2^{2n-2} - n(n+1)2^{n-2}}{(2^n - 1)^2}.$$

Si mostri inoltre che, per n grande, $Var(X) \sim n/4$.

Esercizio 30 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili casuali i.i.d., la cui funzione generatrice dei momenti $\gamma(t)$ è finita per ogni $t \in R$, e sia N una variabile casuale a valori in $\{1, 2, \ldots, n\}$, indipendente da $X_1, X_2, \ldots, X_n$, la cui densità discreta indichiamo con $p_N(\cdot)$. Definiamo la variabile casuale S come segue

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

a) Calcolare, in termini di $\gamma(t)$ e $\{p_N(j)\}_{1 \leq j \leq n}$, la funzione generatrice $\gamma_S(t)$ di S. (Sugg: osservare che $e^{tS} = \sum_{j=1}^n e^{t(X_1 + \cdots + X_j)} \mathbf{1}_{N=j}$.)

b) Calcolare media e varianza di S in termini di media e varianza di X_1 e di N.

Esercizio 31 Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili casuali indipendenti, tali che $X_n \sim Be(1/2^n)$. Definiamo la variabile casuale T, a valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots, +\infty\}$:

$$T = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N} \text{ tali che } X_k = 1\} & \text{se } \{k \in \mathbb{N} \text{ tali che } X_k = 1\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare un'espressione per $P(T > n)$. [*Sugg.*: si noti che l'evento $\{T > n\}$ può essere espresso in modo semplice in funzione delle prime n variabili $X_1, \ldots, X_n$.]

b) Scrivere $\log P(T > n)$ in forma di una somma $\sum_{k=1}^n a_k$, e mostrare che la serie $\sum_k a_k$ converge.

c) Dedurre che $P(T = +\infty) > 0$.

Esercizio 32 Siano $X \sim Be(p)$, $Y \sim Po(\lambda)$ e $Z \sim Po(\mu)$ variabili casuali indipendenti. Definiamo

$$W := XY + (1 - X)Z.$$

a) Senza fare calcoli con densità, calcolare media e varianza di W, e la covarianza $Cov(W, Y)$.

b) Determinare la densità congiunta di (W, Y), e la densità marginale di W.