

Esercizi: fascicolo 6

Esercizio 1 Vengono generati n numeri casuali tra 0 e 1, con distribuzione uniforme. Quanti numeri è necessario generare affinché la probabilità che la somma di essi sia compresa tra $0.49n$ e $0.51n$ sia maggiore o uguale a 0.99?

Esercizio 2 Un venditore porta a porta deve vendere 10 copie di un libro. Se ogni singolo cliente acquista il libro con probabilità 0.1, quanti clienti deve visitare il venditore affinché la probabilità di vendere tutti e dieci i libri sia almeno 0.99?

Esercizio 3 Calcolare approssimativamente la probabilità che una variabile casuale X con distribuzione di Poisson di parametro 100 assuma un valore minore di 95.

Esercizio 4 Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \dots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim \text{Exp}(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale calcolare:

- se $n = 100$ la probabilità $P(T < 90)$;
- il valore minimo di n per cui $P(T < 90) \leq 0.05$.

Esercizio 5 Un giocatore di pallacanestro ha una percentuale di successo nei tiri da tre punti del 20%. Calcolare:

- la probabilità che in 100 tiri faccia non più di 54 punti;
- il numero minimo di tiri che deve effettuare per realizzare almeno 57 punti con probabilità maggiore o uguale a 0.95.

Esercizio 6 Il numero giornaliero di passeggeri sui treni da Milano a Firenze è una variabile aleatoria di distribuzione incognita. Supponendo che il valore atteso sia pari a 3000 e la varianza pari a 10^6 , si calcoli approssimativamente la probabilità che in 30 giorni il numero complessivo di viaggiatori sia almeno 10^5 .

Esercizio 7 Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione di Poisson di parametro 1. Usando opportunamente il Teorema Limite Centrale per tale successione, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!}.$$

Esercizio 8 Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30.000 firme, quante persone è necessario interpellare affinché la soglia delle 30.000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno 0,95?

Esercizio 9 Si assuma che, in un libro di 400 pagine, la probabilità che una pagina sia priva di errori sia 0.98, indipendentemente dalle altre pagine. Sia X il numero di pagine che contengono almeno un errore.

- a. Qual è la distribuzione di X ?
- b. Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente la probabilità dell'evento $\{X \geq 4\}$.
- c. Calcolare la probabilità al punto b. usando un altro tipo di approssimazione, visto a lezione.

Esercizio 10 Per una certa specie africana di uccelli, i neonati hanno – indipendentemente l'uno dall'altro – una probabilità di sopravvivere al primo mese pari a $1/7$. Quelli che sopravvivono al primo mese hanno una probabilità pari a $1/3$ di superare l'anno.

1. Qual è la probabilità che un neonato sopravviva al primo anno?
2. Se un neonato muore entro il primo anno, qual è la probabilità che sia sopravvissuto al primo mese?
3. Si determini approssimativamente il numero minimo n di neonati da monitorare affinché la probabilità che ne sopravvivano almeno 30 dopo un mese sia almeno 0.95.

Esercizio 11 In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B . Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantisce che essi votino per il candidato A . Tutti gli altri elettori votano “a caso”, scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

1. Supponiamo che l'organizzazione malavitosa controlli $n = 2000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?
2. Qual è il numero minimo n di individui che l'organizzazione malavitosa deve controllare, per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?

Esercizio 12 Siano C, X, Y variabili aleatorie reali indipendenti, con $X \sim Po(4)$, $Y \sim Po(4)$ mentre $C \sim Be(p)$, dove $p \in (0, 1)$ è un parametro fissato. Definiamo la variabile

$$W := CX + (1 - C)Y.$$

1. Si mostri che $E(W) = 4$ e $Var(W) = 4$.
2. Siano $W_1, W_2, \dots, W_{100}$ variabili i.i.d. con la stessa legge di W . Si determini approssimativamente il valore di c tale che la somma $W_1 + \dots + W_{100}$ assuma valori maggiori di c con probabilità 0.98.
3. Si dimostri che $W \sim Po(4)$.
[Sugg.: calcolare la densità discreta di W condizionando rispetto agli eventi $\{C = 0\}$ e $\{C = 1\}$]

Esercizio 13 Sia $(X_n)_{n=1}^N$ una famiglia di variabili casuali i.i.d., tali che $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Sia inoltre ξ una variabile casuale con la stessa distribuzione delle X_n e indipendente da tutte le X_n . Poniamo $Y_n := \xi X_n$.

1. Mostrare che le variabili casuali $(Y_n)_{n=1}^N$ sono i.i.d.

2. Mostrare che le variabili casuali bidimensionali $(X_n, Y_n)_{n=1}^N$ sono identicamente distribuite ma non indipendenti.

Esercizio 14 La lunghezza dei chiodini prodotti da una certa ditta ha una distribuzione incognita, la cui media e varianza indichiamo con μ e σ^2 . Il valore di σ^2 è noto e pari a 0.25 mm^2 , mentre il valore di μ (espresso in mm) è incognito e vogliamo stimarlo empiricamente.

A tal fine, misuriamo le lunghezze $X_1, \dots, X_n$ di n chiodini scelti a caso e ne indichiamo la media empirica con $\bar{X}_n := (X_1 + \dots + X_n)/n$. Se n è grande, per la legge dei grandi numeri sappiamo che $\bar{X}_n$ sarà vicino a μ . Per rendere più quantitativa questa affermazione, scegliamo un numero reale $\delta > 0$ e consideriamo l'intervallo I_δ di ampiezza δ centrato in $\bar{X}_n$, vale a dire

$$I_\delta := (\bar{X}_n - \delta, \bar{X}_n + \delta).$$

- Si determini δ_n in modo che la probabilità che l'intervallo I_{δ_n} contenga μ valga approssimativamente 0.95 per n grande.

[Sugg.: si esprima l'evento $\{\mu \in I_{\delta_n}\}$ nella forma $\{a < \bar{X}_n < b\}$ per opportuni a, b .]