Traccia delle soluzioni degli esercizi del fascicolo 6

Esercizio 1 Vengono generati n numeri casuali tra 0 e 1, con distribuzione uniforme. Quanti numeri è necessario generare affinché la probabilità che la somma di essi sia compresa tra $0.49n$ e $0.51n$ sia maggiore o uguale a 0.99?
Soluzione. La probabilità in esame si può riscrivere nella forma

$$P(0.49 \le \overline{X}_n \le 0.51) = P\left(-\frac{0.01}{\sqrt{1/12}}\sqrt{n} \le Z_n \le \frac{0.01}{\sqrt{1/12}}\sqrt{n}\right) \simeq 2\Phi(0.01\sqrt{12n}) - 1.$$

Dobbiamo allora risolvere:

$$\simeq 2\Phi(0.01\sqrt{12n}) - 1 \ge 0.99$$

cioè

$$\Phi(0.01\sqrt{12n}) \ge 0.995 \;\Leftrightarrow\; 0.01\sqrt{12n} \ge \Phi^{-1}(0.995) \simeq 2.58,$$

da cui si trova $n \ge 5547$.

Esercizio 2 Un venditore porta a porta deve vendere 10 copie di un libro. Se ogni singolo cliente acquista il libro con probabilità 0.1, quanti clienti deve visitare il venditore affinché la probabilità di vendere tutti e dieci i libri sia almeno 0.99?
Soluzione. Poste $X_1, \ldots, X_n \sim Be(0,1)$ indipendenti, la probabilità in esame si può riscrivere nella forma

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ge 10\right) = P\left(\overline{X}_n \ge \frac{10}{n}\right) = P\left(Z_n \ge \frac{\frac{10}{n} - 0.1}{\sqrt{0.1 \cdot 0.9}}\sqrt{n}\right)$$

$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\frac{10}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{10}}{0.3}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3}\right).$$

Dobbiamo allora risolvere

$$\Phi\left(\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3}\right) \ge 0.99$$

ossia

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3} \ge 2.33$$

che si può riscrivere nella forma

$$n - 6.99\sqrt{n} - 100 \ge 0,$$

da cui $\sqrt{n} \ge 14.08$, ovvero $n \ge 199$.

Esercizio 3 Calcolare approssimativamente la probabilità che una variabile casuale X con distribuzione di Poisson di parametro 100 assuma un valore minore di 95.
Soluzione. Bisogna ricordare che se $X_1, \ldots, X_{100} \sim Po(1)$ sono indipendenti, allora $X_1 + \ldots + X_n \sim Po(100)$. Ricordando che $E(X_i) = Var(X_i) = 1$, la probabilità da calcolare è

$$P\left(\overline{X}_{100} \le 0.95\right) = P(Z_{100} \le -0.05 \cdot 10) \simeq \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 0.30854.$$

Esercizio 4 Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \dots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1+T_2+\cdots+T_n$. Si supponga che $T_i \sim Exp(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale calcolare:

a. se $n = 100$ la probabilità $P(T < 90)$;

b. il valore minimo di n per cui $P(T < 90) \leq 0.05$.

Soluzione. a.

$$P(\overline{T}_{100} < 0.9) = P(Z_{100} \leq -0.1 \cdot 10) \simeq \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.15866.$$

b.

$$P\left(\overline{T}_n < \frac{90}{n}\right) = P\left(Z_n < \left(\frac{90}{n} - 1\right)\sqrt{n}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right).$$

Vogliamo allora che sia

$$\Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95,$$

da cui

$$\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}} \geq 1.64,$$

che si riscrive nella forma

$$n - 1.64\sqrt{n} - 90 \geq 0 \;\Rightarrow\; n \geq 107.$$

Esercizio 5 Un giocatore di pallacanestro ha una percentuale di successo nei tiri da tre punti del 20%. Calcolare:

a. la probabilità che in 100 tiri faccia non più di 54 punti;

b. il numero minimo di tiri che deve effettuare per realizzare almeno 57 punti con probabilità maggiore o uguale a 0.95.

Soluzione. a. Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se l'i-esimo canestro viene realizzato. Poichè realizzare non più di 54 punti significa realizzare non più di 18 canestri, le probabilità da calcolare è

$$P\left(\overline{X}_{100} \leq \frac{18}{100}\right) = P\left(Z_{100} \leq \frac{-0.02}{\sqrt{0.2 \cdot 0.8}}10\right) \simeq \Phi(-1) = 0.30854.$$

b. Poichè realizzare almeno 57 punti significa realizzare almeno 19 canestri, si vuole che sia

$$P\left(\overline{X}_n \geq \frac{19}{n}\right) = P\left(Z_n \geq \frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4}\sqrt{n}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4}\sqrt{n}\right) \geq 0.95,$$

cioè

$$\frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4}\sqrt{n} \geq 1.64 \;\Leftrightarrow\; 0.2 \cdot n - 0.784\sqrt{n} - 19 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; n \geq 142.$$

Esercizio 6 Il numero giornaliero di passeggeri sui treni da Milano a Firenze è una variabile aleatoria di distribuzione incognita. Supponendo che il valore atteso sia pari a 3000 e la varianza pari a 10^6, si calcoli approssimativamente la probabilità che in 30 giorni il numero

complessivo di viaggiatori sia almeno 10^5.
Soluzione. Sia X_i il numero di passeggeri de giorno i-mo.

$$P(X_1 + \cdots + X_{30} > 10^5) = P(\bar{X}_{30} > \frac{10^5}{30}$$

$$= P(\frac{\bar{X}_{30} - 3000}{1000}\sqrt{30} > \frac{333}{1000}\sqrt{30}) \simeq 1 - \Phi(1.825) \simeq 0.034.$$

Esercizio 7 Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione di Poisson di parametro 1. Usando opportunamente il Teorema del Limite Centrale per tale successione, calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!}.$$

Soluzione. Notare che $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim Po(n)$. Ma allora

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leq n + \sqrt{n}) = P\left(\frac{\overline{X}_n - 1}{1}\sqrt{n} \leq 1\right).$$

Per il Teorema del limite centrale, la successione $\frac{\overline{X}_n - 1}{1}\sqrt{n}$ converge in distribuzione ad una Normale standard. Perciò

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = \Phi(1).$$

Esercizio 8 Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30.000 firme, quante persone è necessario interpellare affinchè la soglia delle 30.000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno $0,95$?
Soluzione. Sia X_i la variabile che vale 1 se l'i-esima persona interpellata accetta di firmare, e 0 altrimenti. Per ipotesi $X_i \sim Be(0.6)$, e le X_i si possono ritenere indipendenti. La probabilità in esame è, allora, usando l'approssimazione normale,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 30000\right) = P\left(\frac{\overline{X}_n - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n} \geq \frac{\frac{30000}{n} - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n}\right)$$

$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\frac{30000}{n} - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(0.6 - \frac{\frac{30000}{n}}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n}\right).$$

Richiedendo che tale probabilità sia maggiore o uguale a 0.95, si ottiene:

$$0.6 - \frac{\frac{30000}{n}}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n} \geq \Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.64$$

che equivale a

$$0.6n - 0.8\sqrt{n} - 30000 \geq 0$$

da cui

$$n \geq 50300.$$

Esercizio 9 Si assuma che, in un libro di 400 pagine, la probabilità che una pagina sia priva di errori sia 0.98, indipendentemente dalle altre pagine. Sia X il numero di pagine che contengono almeno un errore.

a. Qual è la distribuzione di X?

b. Usando l'approssimazione normale, calcolare approssimativamente la probabilità dell'evento $\{X \geq 4\}$.

c. Calcolare la probabilità al punto b. usando un altro tipo di approssimazione, visto a lezione.

Soluzione. a. Posto

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima pagina contiene almeno un errore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $X_i \sim Be(0.02)$, le X_i sono indipendenti e $X = \sum_{i=1}^{400} X_i \sim B(400, 0.02)$.

b.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(\overline{X}_{400} \geq 0.01) = P\left(Z_{400} \geq \frac{0.01 - 0.02}{\sqrt{0.02 \times 0.98}}\sqrt{400}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(Z_{400} \geq \frac{0.01 - 0.02}{\sqrt{0.02 \times 0.98}}\sqrt{400}\right) \simeq 0.92364. \end{aligned}$$

c. Usando l'approssimazione di Poisson, $Be(400, 0.02) \approx Po(8)$. Ne segue

$$P(X \geq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{3} P(X = i) = 1 - e^{-8} \sum_{i=0}^{3} \frac{8^i}{i!} \simeq ...$$

Esercizio 10 Per una certa specie africana di uccelli, i neonati hanno – indipendentemente l'uno dal l'altro – una probabilità di sopravvivere al primo mese pari a $1/7$. Quelli che sopravvivono al primo mese hanno una probabilità pari a $1/3$ di superare l'anno.

1. Qual è la probabilità che un neonato sopravviva al primo anno?
2. Se un neonato muore entro il primo anno, qual è la probabilità che sia sopravvissuto al primo mese?
3. Si determini approssimativamente il numero minimo n di neonati da monitorare affinché la probabilità che ne sopravvivano almeno 30 dopo un mese sia almeno 0.95.

Soluzione.

1. Introducendo gli eventi $A :=$ "il neonato sopravvive al primo mese" e $B :=$ "il neonato sopravvive al primo anno", i dati del problema ci dicono che

   $$P(A) \;=\; \frac{1}{7}, \qquad P(B|A) \;=\; \frac{1}{3}.$$

   Di conseguenza, per il teorema delle probabilità totali,

   $$P(B) \;=\; P(B|A)P(A) \;+\; P(B|A^c)P(A^c) \;=\; P(B|A)P(A) \;=\; \frac{1}{3}\frac{1}{7} \;=\; \frac{1}{21},$$

   dove si è usato il fatto che $P(B|A^c) = 0$, perché $B \subseteq A$.

2. Per la formula di Bayes

$$P(A|B^c) \;=\; \frac{P(B^c|A)P(A)}{P(B^c)} \;=\; \frac{(1-\frac{1}{3})\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{21}} \;=\; \frac{1}{10}\,.$$

3. Dati n neonati, il numero di questi che sopravvive dopo un mese è una variabile casuale X con distribuzione $B(n,p)$, con $p=\frac{1}{7}$. Applicando l'approssimazione normale e la correzione di continuità, si ottiene

$$P(X\geq 30) \;=\; P(X\geq 29.5) \;=\; P\left(\frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\geq \frac{\frac{29.5}{n}-\frac{1}{7}}{\sqrt{\frac{1}{7}(1-\frac{1}{7})}}\sqrt{n}\right) \;\simeq\; \Phi\left(\frac{\frac{1}{7}-\frac{29.5}{n}}{\sqrt{6}/7}\sqrt{n}\right).$$

Dato che $\Phi(z)\geq 0.95$ se e solo se $z\geq\Phi^{-1}(0.95)\simeq 1.64$, si ottiene la disequazione

$$\frac{\frac{1}{7}-\frac{29.5}{n}}{\sqrt{6}/7}\sqrt{n} \;\geq\; 1.64 \qquad\Longleftrightarrow\qquad n^2-1.64\sqrt{6}\sqrt{n}-29.5\cdot 7 \;\geq\; 0\,.$$

Le soluzioni positive sono date da $\sqrt{n}\geq 16.52$, cioè $n\geq 273$.

Esercizio 11 In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B. Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantisce che essi votino per il candidato A. Tutti gli altri elettori votano "a caso", scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

1. Supponiamo che l'organizzazione malavitosa controlli $n=2\,000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?

2. Qual è il numero minimo n di individui che l'organizzazione malavitosa deve controllare, per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?

Soluzione.

1. Sia X il numero di voti ricevuti da A tra i $998\,000$ elettori non controllati. Notare che $X\sim B(998\,000,1/2)$. Il candidato A vince se $X>498\,000$. Usando l'approssimazione normale (dati i numeri elevati la correzione di continuità non è rilevante)

$$P(X>498\,000)=P\left(\frac{X-499\,000}{\frac{1}{2}\sqrt{998\,000}}>-\frac{1\,000}{\frac{1}{2}\sqrt{998\,000}}\right)\simeq\Phi(2)=0.977.$$

2. Se X è il numero di voti ricevuti da A tra i $1\,000\,000-n$ elettori non controllati, si ha $X\sim B(1\,000\,000-n,1/2)$. Il candidato A vince se $X>500000-n$, per cui procedendo come sopra

$$P(X>500\,000-n)=P\left(\frac{X-\frac{1\,000\,000-n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000-n}}>-\frac{n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000-n}}\right)\simeq\Phi\left(\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000-n}}\right).$$

Quindi deve essere $\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000-n}}>\Phi^{-1}(0.99)\simeq 2.33$. Elevando al quadrato e risolvendo, si trova $n\geq 2333$.

Esercizio 12 Siano C, X, Y variabili aleatorie reali indipendenti, con $X \sim Po(4)$, $Y \sim Po(4)$ mentre $C \sim Be(p)$, dove $p \in (0,1)$ è un parametro fissato. Definiamo la variabile

$$W := CX + (1-C)Y .$$

1. Si mostri che $E(W) = 4$ e $Var(W) = 4$.

2. Siano $W_1, W_2, \ldots, W_{100}$ variabili i.i.d. con la stessa legge di W. Si determini approssimativamente il valore di c tale che la somma $W_1 + \ldots + W_{100}$ assuma valori maggiori di c con probabilità 0.98.

3. Si dimostri che $W \sim Po(4)$.
   [*Sugg.*: calcolare la densità discreta di W condizionando rispetto agli eventi $\{C = 0\}$ e $\{C = 1\}$]

Soluzione.

1. Per le proprietà ben note del valor medio si ha

   $$E(W) = E(C)E(X) + (1 - E(C))E(Y) = p4 + (1-p)4 = 4 .$$

   Si noti che

   $$W^2 = C^2X^2 + (1-C)^2Y^2 + 2C(1-C)XY = CX^2 + (1-C)Y^2 ,$$

   poiché $C = C^2$, $(1-C) = (1-C)^2$ e $C(1-C) = 0$, essendo C a valori in $\{0,1\}$. Dato che $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 4 + 16 = 20$ e analogamente $E(Y^2) = 20$, si ottiene

   $$E(W^2) = E(C)E(X^2) + (1 - E(C))E(Y^2) = p20 + (1-p)20 = 20 ,$$

   da cui $Var(W) = E(W^2) - E(W)^2 = 20 - 16 = 4$.

2. Indicando $\mu = 4$, $\sigma = 2$ si ottiene

   $$\begin{aligned} P(W_1 + \ldots + W_{100} > c) &= P\left(\overline{W}_{100} > \frac{c}{100}\right) = P\left(\frac{\overline{W}_{100} - \mu}{\sigma}\sqrt{100} > \frac{\frac{c}{100} - 4}{2} 10\right) \\ &\simeq P\left(Z > \frac{c}{20} - 20\right) = \Phi\left(20 - \frac{c}{20}\right) . \end{aligned}$$

   Dato che $\Phi^{-1}(0.98) \simeq 2.05$, si ottiene l'equazione

   $$20 - \frac{c}{20} = 2.05 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 359.$$

3. Condizionando rispetto agli eventi $\{C = 1\}$ e $\{C = 0\}$ e usando la formula delle probabilità totali, per $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ si ottiene

   $$\begin{aligned} P(W = k) &= P(W = k | C = 0)P(C = 0) + P(W = k | C = 1)P(C = 1) \\ &= P(Y = k | C = 0)(1-p) + P(X = k | C = 1)p \ = \ P(Y = k)(1-p) + P(X = k)p , \end{aligned}$$

   e dato che $P(X = k) = P(Y = k) = e^{-4}4^k/k!$ si ottiene $P(W = k) = e^{-4}4^k/k!$, quindi $W \sim Po(4)$.

Esercizio 13 Sia $(X_n)_{n=1}^N$ una famiglia di variabili casuali i.i.d., tali che $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Sia inoltre ξ una variabile casuale con la stessa distribuzione delle X_n e indipendente da tutte le X_n. Poniamo $Y_n := \xi X_n$.

1. Mostrare che le variabili casuali $(Y_n)_{n=1}^N$ sono i.i.d.
2. Mostrare che le variabili casuali bidimensionali $(X_n, Y_n)_{n=1}^N$ sono identicamente distribuite ma non indipendenti.

Soluzione.

1. La tesi segue se mostriamo che $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ hanno la stessa distribuzione. Anzitutto, se $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, 1\}^n$, è chiaro che
$$P(X_1 = \sigma_1, \ldots, X_n = \sigma_n) = \frac{1}{2^n}.$$
Usando l'indipendenza tra $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e ξ, abbiamo
$$\begin{aligned} &P(Y_1 = \sigma_1, \ldots, Y_n = \sigma_n) \\ &\quad = P(X_1 = \sigma_1, \ldots, X_n = \sigma_n, \xi = 1) + P(X_1 = -\sigma_1, \ldots, X_n = -\sigma_n, \xi = -1) \\ &\quad = P(X_1 = \sigma_1, \ldots, X_n = \sigma_n)P(\xi = 1) + P(X_1 = -\sigma_1, \ldots, X_n = -\sigma_n)P(\xi = -1) \\ &\quad = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$
2. Si noti che
$$P(X_n = 1, Y_n = 1) = P(X_n = 1, \xi = 1) = \frac{1}{4} = P(X_n = 1, \xi = -1) = P(X_n = 1, Y_n = -1).$$
Allo stesso modo si mostra che
$$P(X_n = -1, Y_n = 1) = P(X_n = -1, Y_n = -1) = \frac{1}{4},$$
e quindi la distribuzione di (X_n, Y_n) non dipende da n.
Se le coppie (X_n, Y_n) fossero indipendenti, anche i prodotti $X_n Y_n$ sarebbero indipendenti (in quanto funzioni di variabili casuali indipendenti sono indipendenti). Ma, osservando che $X_n Y_n = \xi$ per ogni n,
$$P(X_1Y_1 = 1, X_2Y_2 = 1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2} \neq P(X_1Y_1 = 1)P(X_2Y_2 = 1) = P(\xi = 1)^2 = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 14 La lunghezza dei chiodini prodotti da una certa ditta ha una distribuzione incognita, la cui media e varianza indichiamo con μ e σ^2. Il valore di σ^2 è noto e pari a $0.25\,\mathrm{mm}^2$, mentre il valore di μ (espresso in mm) è incognito e vogliamo stimarlo empiricamente.

A tal fine, misuriamo le lunghezze $X_1, \ldots, X_n$ di n chiodini scelti a caso e ne indichiamo la media empirica con $\overline{X}_n := (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Se n è grande, per la legge dei grandi numeri sappiamo che $\overline{X}_n$ sarà vicino a μ. Per rendere più quantitativa questa affermazione, scegliamo un numero reale $\delta > 0$ e consideriamo l'intervallo I_δ di ampiezza δ centrato in $\overline{X}_n$, vale a dire
$$I_\delta := \left(\overline{X}_n - \delta\,,\, \overline{X}_n + \delta\right).$$

- Si determini δ_n in modo che la probabilità che l'intervallo I_{δ_n} contenga μ valga approssimativamente 0.95 per n grande.

  [*Sugg.*: si esprima l'evento $\{\mu \in I_{\delta_n}\}$ nella forma $\{a < \overline{X}_n < b\}$ per opportuni a, b.]

Soluzione.

Per definizione $\mu \in I_{\delta_n}$ significa $\overline{X}_n - \delta_n < \mu < \overline{X}_n + \delta_n$. Possiamo riscrivere la prima disuguaglianza come

$$\overline{X}_n - \delta_n < \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{X}_n < \mu + \delta_n \,,$$

e la seconda come

$$\mu < \overline{X}_n + \delta_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{X}_n > \mu - \delta_n \,.$$

Questo mostra che

$$\{\mu \in I_{\delta_n}\} \;=\; \{\mu - \delta_n < \overline{X}_n < \mu + \delta_n\} \,,$$

per cui, applicando il teorema limite centrale e ricordando che $\sigma = 0.5$,

$$\begin{aligned} P(\mu \in I_{\delta_n}) = P(\mu - \delta_n < \overline{X}_n < \mu + \delta_n) &= P\left(\frac{-\delta_n}{0.5/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{-\delta_n}{0.5/\sqrt{n}}\right) \\ &\approx P\left(-2\delta_n\sqrt{n} < Z < 2\delta_n\sqrt{n}\right) = 2\,\Phi(2\delta_n\sqrt{n}) - 1 \,, \end{aligned}$$

dove $Z \sim N(0,1)$ e $\Phi(x) = P(Z \leq x)$. Imponendo la condizione $P(\mu \in I_{\delta_n}) = 0.95$ si ottiene $\Phi(2\delta_n\sqrt{n}) = 0.975$, cioè $2\delta_n\sqrt{n} = \Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$ e quindi $\delta_n = 0.98/\sqrt{n}$.