II Appello di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________________
Laurea in Matematica	Nome: ______________________
2 luglio 2009	Matricola: ______________________

ESERCIZIO 1. Per una certa specie africana di uccelli, i neonati hanno – indipendentemente l'uno dal l'altro – una probabilità di sopravvivere al primo mese pari a $1/7$. Quelli che sopravvivono al primo mese hanno una probabilità pari a $1/3$ di superare l'anno.

(a) Qual è la probabilità che un neonato sopravviva al primo anno?

(b) Se un neonato muore entro il primo anno, qual è la probabilità che sia sopravvissuto al primo mese?

(c) Si determini approssimativamente il numero minimo n di neonati da monitorare affinché la probabilità che ne sopravvivano almeno 30 dopo un mese sia almeno 0.95.

SOLUZIONE.

ESERCIZIO 2. Al tavolo di un bistrot alcuni avventori giocano a dadi. Ciascun giocatore ha a disposizione un dado equilibrato a sei facce: se ottiene 5 oppure 6, lancia nuovamente il dado; la prima volta che ottiene 1, 2, 3 oppure 4, passa il turno al giocatore seguente. Il punteggio ottenuto da un giocatore in un turno è pari alla somma degli esiti dei lanci effettuati.

(a) Si determini la probabilità che il turno di un giocatore duri n lanci, per $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(b) Se il turno di un giocatore dura due lanci, qual è la probabilità che il punteggio da lui ottenuto sia dispari?

(c) Qual è la probabilità che un giocatore ottenga un punteggio pari a 5? E pari a 11?

SOLUZIONE.

ESERCIZIO 3. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e indichiamo con S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$, munito della probabilità P uniforme. Gli elementi di S_n saranno indicati con $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$. Introduciamo le variabili casuali scalari X, Y definite su S_n:

$$X(\sigma) \; := \; \sigma(1) \, , \qquad Y(\sigma) \; := \; \sigma(2) \, .$$

(a) Si mostri che, per ogni $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la densità congiunta di (X, Y) è data da

$$p_{X,Y}(i,j) \; = \; \begin{cases} \dfrac{1}{c_n} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases} \, ,$$

dove c_n è un'opportuna costante che è richiesto di determinare.

(b) (*) Si determini la densità della variabile $D := Y - X$.
[*Sugg:* basta calcolare $p_D(m)$ per $m > 0$, poiché per simmetria $p_D(-m) = p_D(m)$.]

Indichiamo ora con Z, W due variabili casuali scalari indipendenti, definite su un altro spazio di probabilità $(\Omega, \widetilde{P})$, ciascuna con distribuzione uniforme nell'insieme $\{1, \ldots, n\}$: in altri termini, $\widetilde{P}(Z = i) = \frac{1}{n}$, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, e analogamente per W.

(c) Si calcoli $\widetilde{P}(Z \neq W)$.

(d) Si mostri che, per ogni $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si ha che $\widetilde{P}(Z = i, W = j \,|\, Z \neq W) = p_{X,Y}(i, j)$.

SOLUZIONE.

ESERCIZIO 4. Sia $X \sim U(0,1)$. Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo $g(x) := 4x(1-x)$ e definiamo $Y := g(X)$.

(a) Si determini la funzione di ripartizione di Y, si deduca che la variabile Y è assolutamente continua e se ne calcoli la densità.

(b) Si calcoli $Cov(X, Y)$.

SOLUZIONE.