

Prova Scritta di Probabilità e Statistica Laurea in Matematica 10 settembre 2012	Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____
---	---

ESERCIZIO 1. Facendo uso solamente della definizione di spazio di probabilità, dell'additività finita e della continuità dal basso della probabilità (A_n crescente $\Rightarrow P(\cup_n A_n) = \lim_n P(A_n)$), dimostrare che se $(A_n)_{n \geq 1}$ è una successione arbitraria di eventi, allora

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

SOLUZIONE. *Passo 1.* Dimostriamo che per ogni coppia di eventi A, B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Anzitutto, essendo A esprimibile come unione disgiunta

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B),$$

si ha che

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B),$$

e analogamente con A a B scambiati. Infine, $A \cup B$ si può scrivere come unione disgiunta

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

e perciò

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Passo 2. Dimostriamo, per induzione su n , che

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Per il passo induttivo, sia

$$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Per il passo 1 e l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n \cup A_{n+1}) = P(B_n) + P(A_{n+1}) - P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &\leq P(B_n) + P(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k). \end{aligned}$$

Passo 3. Notare che (B_n) è una successione crescente, e $\cup_n B_n = \cup_n A_n$. Perciò, per la continuità dal basso,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_n P(B_n) \\ &\leq \lim_n \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Siano V, Y, Z tre variabili scalari indipendenti, per cui $Y, Z \in L^2$, $E(Y) = E(Z)$, $E(Y^2) = E(Z^2)$. Sia poi $g \in \mathcal{C}^2$ una funzione limitata e con derivate prima e seconda limitata. Poniamo $C := \sup\{|g''(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Mostrare che

$$|E[g(V+Y)] - E[g(V+Z)]| \leq CE(Y^2).$$

SOLUZIONE. Per la Formula di Taylor

$$g(V+Y) = g(V) + g'(V)Y + R(V, Y),$$

dove $|R(V, Y)| \leq \frac{C}{2}Y^2$. Scrivendo l'analoga formula con Z al posto di Y e sottraendo, si trova

$$g(V+Y) - g(V+Z) = g'(V)[Y - Z] + R(V, Y) - R(V, Z),$$

da cui, passando al valor medio e usando l'indipendenza

$$|E[g(V+Y)] - E[g(V+Z)]| = |E[R(V, Y)] - E[R(V, Z)]| \leq \frac{C}{2}E(Y^2) + \frac{C}{2}E(Z^2) = CE(Y^2).$$

ESERCIZIO 3. Si scelga a caso, con distribuzione uniforme, un punto P sulla circonferenza centrata nell'origine O e raggio 1 (in altre parole, detto Θ l'angolo che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle x , $\Theta \sim U(0, 2\pi)$). Sia X il quadrato della distanza tra P e il punto di coordinate $(1, 0)$. Si calcoli la media e la varianza di X .

SOLUZIONE. Si ha

$$X = (1 - \cos(\Theta))^2 + \sin^2(\Theta) = 2(1 - \cos(\Theta)).$$

Pertanto

$$E(X) = 2 - 2E(\cos(\Theta)) = 2 - \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x) dx = 2.$$

$$E(X^2) = 4 + 4E[\cos^2(\Theta)] - 8E[\cos(\Theta)] = 4 + \frac{4}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = 6,$$

da cui

$$Var(X) = 2.$$

ESERCIZIO 4. 10000 rappresentanti di altrettante aziende si presentano oggi alla Banca BBB, ottenendo ognuno un prestito di 1000 Euro, da restituire tra un anno con l'interesse del 5.5%. Ogni azienda ha probabilità 0.05 di fallire entro l'anno, *indipendentemente* dalle altre aziende, e in questo caso non restituirà il prestito.

- (a) Qual è la probabilità, approssimata con l'approssimazione normale, che fra un anno la Banca BBB incassi meno di quanto oggi ha elargito?
- (b) Quanto dovrebbe essere il tasso di interesse affinché la probabilità di cui al punto precedente sia non maggiore di 0.05?

NB. Una delle cause dell'attuale crisi economica sta nel fatto che si credeva che le cose andassero più o meno come in questo esercizio, cioè che le aziende fallissero indipendentemente fra loro. Non è così, purtroppo.....

SOLUZIONE.

- (a) Sia X_i la variabile che vale 1 se l'azienda i -ma restituisce il prestito, e 0 altrimenti. Dunque se r è il tasso di interesse (in questo caso $r = 0.055$), il capitale riscosso dalla Banca fra un anno è

$$S_n := 1000(1+r) \sum_{i=1}^{10000} X_i,$$

e le X_i sono indipendenti con distribuzione $Be(0.95)$. Visto il valore elevato di $n = 10000$ rispetto al parametro della Bernoulli, è lecito usare l'approssimazione normale per la standardizzazione Z_n di S_n :

$$P(S_n < 10^8) = P\left(Z_n < \frac{\frac{1}{1+r} - 0.95}{\sqrt{0.95 \cdot 0.05}} \sqrt{10000}\right) \simeq \Phi\left(458.83 \left[\frac{1}{1+r} - 0.95\right]\right).$$

Per $r = 0.055$

$$P(S_n < 10^8) \simeq \Phi(-0.98) \simeq 0.16.$$

- (b) Dev'essere

$$458.83 \left[\frac{1}{1+r} - 0.95\right] \leq \Phi^{-1}(0.05) \simeq -1.64,$$

da cui si ricava $r \geq 0.566$. Il tasso dev'essere dunque almeno del 5.66%.

ESERCIZIO 5.

- (a) Siano $X, Y \sim \Gamma(2, 1)$ variabili casuali indipendenti, e sia $Z := \min(X, Y)$. Si determini la densità F_Z di Z .
- (b) Siano $W \sim Be(1/2)$, $T \sim \Gamma(2, 2)$ e $U \sim \Gamma(3, 2)$ variabili casuali indipendenti. Mostrare che la variabile casuale $WT + (1 - W)U$ ha la stessa distribuzione della variabile Z del punto precedente.

SOLUZIONE.

- (a) Cominciamo col calcolare, per $x > 0$,

$$1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} te^{-t} dt = (x + 1)e^{-x}.$$

Perciò

$$1 - F_Z(x) = [1 - F_X(x)][1 - F_Y(x)] = (x + 1)^2 e^{-2x}.$$

Derivando, con facili calcoli si ottiene

$$f_Z(x) = F'_Z(x) = 2(x^2 + x)e^{-2x}\mathbf{1}_{(0, +\infty)}(x).$$

- (b) Sia $R := WT + (1 - W)U$. Si ha,

$$\begin{aligned} F_R(x) &= P(R \leq x) = P(R \leq x, W = 1) + P(R \leq x, W = 0) \\ &= P(T \leq x, W = 1) + P(U \leq x, W = 1) = \frac{1}{2}F_T(x) + \frac{1}{2}F_U(x). \end{aligned}$$

Derivando, si ha allora

$$f_R(x) = \frac{1}{2}f_T(x) + \frac{1}{2}f_U(x).$$

Sostituendo le densità f_T e f_U si verifica che $f_R = f_Z$.

ESERCIZIO 6. Un mazzo di 52 carte da Poker viene accuratamente mescolato. Quindi si girano, una alla volta, le carte del mazzo, a partire da quella che si trova in cima allo stesso. Si smette di girare carte non appena si trova un asso. Sia X il numero di carte girate. Determinare la densità discreta di X .

SOLUZIONE. Sia $\Omega = S_{52}$, l'insieme delle permutazioni delle 52 carte, con la probabilità uniforme. Gli elementi dell'evento $\{X = k\}$, $1 \leq k \leq 49$, si possono contare come segue:

- si scelgono le $k - 1$ carte, prive di assi, da mettere in cima al mazzo: $\binom{48}{k-1}$ modi.
- Si ordinano le carte scelte al punto precedente: $(k - 1)!$ modi.
- Si sceglie un ordine asso per la k -ma carta: 4 modi.
- Si ordinano le carte restanti: $(52 - k)!$ modi.

Perciò

$$P(X = k) = \frac{4 \binom{48}{k-1} (k-1)! (52-k)!}{52!} = 4 \frac{(52-k)(51-k)(50-k)}{52 \cdot 51 \cdot 50}.$$

ESERCIZIO 7. Una guida alpina organizza abitualmente salite alla cima del Monte Archimede. Talvolta, in presenza di cattive condizioni atmosferiche, la guida decide di tornare prima di aver raggiunto la cima, anche a seconda delle capacità delle persone accompagnate. In caso di pioggia senza raffiche di vento, la guida rinuncia a raggiungere la cima il 20% delle volte; in caso di raffiche di vento ma senza pioggia, la guida rinuncia il 30% delle volte; infine, con pioggia e raffiche di vento la guida rinuncia l'80% delle volte. Gli eventi “si trova pioggia lungo il percorso” e “ci sono raffiche di vento lungo il percorso” sono indipendenti, e hanno probabilità rispettivamente 0.3 e 0.2. Oggi un gruppo è partito con la guida, ma sono tornati senza aver raggiunto la cima. Qual è la probabilità che abbiano trovato pioggia?

SOLUZIONE. Consideriamo gli eventi A = “la guida rinuncia a raggiungere la cima”, B = “si trova la pioggia lungo il percorso”, C = “ci sono raffiche di vento lungo il percorso”. Sappiamo che $P(A|B \setminus C) = 0.2$, $P(A|C \setminus B) = 0.3$, $P(A|B \cap C) = 0.8$, $P(A|B^c \cap C^c) = 0$. Inoltre, essendo B e C indipendenti

$$P(B \setminus C) = P(B) - P(B \cap C) = P(B) - P(B)P(C) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$$

$$P(C \setminus B) = P(C) - P(B \cap C) = P(C) - P(B)P(C) = 0.2 \cdot 0.7 = 0.14$$

e, chiaramente $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.06$. Per la Formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(B \setminus C|A) + P(B \cap C|A) \\ &= \frac{P(A|B \setminus C)P(B \setminus C)}{P(A|B \setminus C)P(B \setminus C) + P(A|C \setminus B)P(C \setminus B) + P(A|B \cap C)P(B \cap C) + P(A|B^c \cap C^c)P(B^c \cap C^c)} \\ &\quad + \frac{P(A|B \cap C)P(B \cap C)}{P(A|B \setminus C)P(B \setminus C) + P(A|C \setminus B)P(C \setminus B) + P(A|B \cap C)P(B \cap C) + P(A|B^c \cap C^c)P(B^c \cap C^c)} \\ &= \frac{16}{23}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 8. Sia $\Omega_n := \{0, 1\}^n$, e

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n.$$

In altre parole gli elementi di Ω sono sequenze binarie di lunghezza finita. Se $\omega \in \Omega$, l'unico $n \geq 1$ per cui $\omega \in \Omega_n$ si dice *lunghezza* di ω , e si denota con $l(\omega)$. Per ogni $\omega \in \Omega$, definiamo

$$p(\omega) := 2^{-2l(\omega)}.$$

(a) Mostrare che p è la densità associata ad una probabilità su Ω , cioè

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \sum_{\omega \in A} p(\omega) \end{aligned}$$

è una probabilità.

(b) Sullo spazio di probabilità (Ω, P) appena definito, si definisca per ogni $i \geq 1$ la variabile casuale

$$X_i(\omega) := \begin{cases} \omega_i & \text{se } i \leq l(\omega) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si determini la distribuzione di X_i .

SOLUZIONE.

(a) p è la densità di una probabilità se $p(\omega) \geq 0$ per ogni ω (il che è ovvio in questo caso) e $\sum_{\omega} p(\omega) = 1$. Ma

$$\sum_{\omega \in \Omega} 2^{-2l(\omega)} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\omega \in \Omega_n} 2^{-2n} = \sum_{n \geq 1} 2^{-2n} |\Omega_n| = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1.$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= \sum_{n \geq i} \sum_{\omega \in \Omega_n : \omega_i = 1} 2^{-2l(\omega)} \\ &= \sum_{n \geq i} 2^{-2n} |\{\omega \in \Omega_n : \omega_i = 1\}| \\ &= \sum_{n \geq i} 2^{-2n} 2^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq i} 2^{-n} = 2^{-i}. \end{aligned}$$

In altre parole, $X_i \sim Be(2^{-i})$.

ESERCIZIO 9. Sia $(X_n)_{n \geq 2}$ una successione di variabili indipendenti tali che $X_n \sim \text{Exp}(n)$. Definiamo, per $n \geq 2$,

$$Y_n := \sum_{k=2}^n X_k.$$

(a) Mostrare che

$$E(e^{Y_n}) = n \quad E(e^{-Y_n}) = \frac{2}{n+1}.$$

(b) Usando il fatto che, per ogni $s > 0$

$$P(Y_n \geq s) = P(e^{Y_n} \geq e^s) \quad P(Y_n \leq s) = P(e^{-Y_n} \geq e^{-s}),$$

mostrare che per ogni $c > 0$ con $c < \log n$,

$$P(Y_n \geq \log n + c) \leq e^{-c}$$

$$P(Y_n \leq \log n - c) \leq 2e^{-c}.$$

SOLUZIONE.

(a) Osserviamo anzitutto che

$$E(e^{X_n}) = n \int_0^{+\infty} e^x e^{-nx} dx = \frac{n}{n-1}$$

$$E(e^{-X_n}) = n \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-nx} dx = \frac{n}{n+1}.$$

Per le proprietà delle variabili casuali indipendenti

$$E(e^{Y_n}) = \prod_{k=2}^n E(e^{X_k}) = \prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1} = n$$

e

$$E(e^{-Y_n}) = \prod_{k=2}^n E(e^{-X_k}) = \prod_{k=2}^n \frac{k}{k+1} = \frac{2}{n+1}.$$

(b) Usando la Disuguaglianza di Chebichev per le variabili e^{Y_n} e e^{-Y_n} , si trova

$$P(Y_n \geq \log n + c) = P(e^{Y_n} \geq ne^c) \leq \frac{E(e^{Y_n})}{ne^c} = e^{-c}$$

$$P(Y_n \leq \log n - c) = P(e^{-Y_n} \geq e^c/n) \leq \frac{E(e^{-Y_n})}{e^c/n} = \frac{2n}{n+1} e^{-c} \leq 2e^{-c}.$$