I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ______
Laurea in Matematica	Nome: ______
26 aprile 2012	Matricola: ______

TEMA B

ESERCIZIO 1. Siano A, B, C, D quattro eventi indipendenti. Mostrare che $A \cup C$ e $B \cap D$ sono eventi indipendenti. (È possibile usare, senza dimostrarle, le proprietà fondamentali della probabilità)

SOLUZIONE. Occorre mostrare che

$$P((A \cup C) \cap (B \cap D)) = P(A \cup C)P(B \cap D) \tag{1}$$

Abbiamo, usando la definizione di indipendenza,

$$\begin{aligned} P((A \cup C) \cap (B \cap D)) &= P((A \cap B \cap D) \cup (C \cap B \cap D)) \\ &= P(A \cap B \cap D) + P(C \cap B \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D) \\ &= P(A)P(B)P(D) + P(C)P(B)P(D) - P(A)P(B)P(C)P(D) \\ &= [P(A) + P(C) - P(A)P(C)]P(B)P(D) = [P(A) + P(C) - P(A \cap C)]P(B \cap D) \\ &= P(A \cup C)P(B \cap D). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto, $X : \Omega \to E$ una variabile aleatoria, $A \subseteq E$. Si dimostri la seguente affermazione:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

SOLUZIONE. Sia $X(\Omega)$ l'immagine di X. L'evento $\{X \in A\}$ si può decomporre come unione disgiunta come segue

$$\{X \in A\} = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{X = x\}.$$

Essendo $A \cap X(\Omega)$ un insieme finito o numerabile, si può usare la σ-additività:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in A} P(X = x),$$

dove quest'ultima uguaglianza segue dal fatto che se $x \notin X(\Omega)$ allora $\{X = x\} = \emptyset$, per cui $P(X = x) = 0$.

ESERCIZIO 3. Siano A, B, C tre eventi. Dimostrare che

$$P(A|B \cup C) \leq P(A|B) + P(A|C).$$

SOLUZIONE.

$$\begin{aligned} P(A|B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B \cup C)} &\leq \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(B \cup C)} \\ &\leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = P(A|B) + P(A|C), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \leq P(A \cap B) + P(A \cap C)$ e $P(B), P(C) \leq P(B \cup C)$.

ESERCIZIO 4. L'urna A contiene 2 palline rosse e 4 verdi, l'urna B contiene 4 palline rosse e 2 verdi. Scelgo a caso una delle due urne, e da questa esegue n estrazioni con reimmissione. Se delle n palline estratte esattamente k sono rosse, qual è la probabilità che l'urna scelta fosse l'urna A?

SOLUZIONE. Sia E_k = "tra le n palline estratte esattamente k sono rosse", F = "l'urna scelta è la A". Abbiamo

$$P(E_k|F) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k},$$

$$P(E_k|F^c) = \binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

$$P(F) = P(F^c) = \frac{1}{2}.$$

Dunque

$$P(F|E_k) = \frac{P(E_k|F)P(F)}{P(E_k|F)P(F) + P(E_k|F^c)P(F^c)} = \frac{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}}{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} + \binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}} = \frac{1}{1+2^{2k-n}}.$$

ESERCIZIO 5. Due accanite giocatrici, Silvia e Beatrice, lanciano $2n$ volte una moneta. Quando esce testa Silvia vince un Euro, altrimenti è Beatrice a vincere un Euro. Qual è la probabilità che alla fine del gioco Silvia e Beatrice abbiano vinto la stessa cifra?

SOLUZIONE. L'evento in questione avviene se e solo se in $2n$ lanci ottengo n esattamente n teste, il che avviene con probabilità

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}.$$

ESERCIZIO 6. Si lancia tre volte un dado equilibrato. Sia X_i il punteggio ottenuto all'i-mo lancio. Consideriamo i tre eventi:

$$A := \{X_1 = X_2\} \quad B := \{X_1 = X_3\} \quad C := \{X_2 = X_3\}.$$

Mostrare che A e B sono indipendenti, così come A, C e B, C, ma i tre eventi A, B, C non sono indipendenti.

SOLUZIONE. Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, con la probabilità uniforme P.

$$|A| = |B| = |C| = 6 \cdot 6 = 36$$

(6 scelte per i due punteggi uguali, 6 per l'altro). Quindi

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}.$$

Inoltre $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{X_1 = X_2 = X_3\}$ che ha 6 elementi. Perciò

$$P(A \cap B) = \frac{6}{6^3} = P(A)P(B),$$

e quindi A e B sono indipendenti. Analogamente per gli altri due casi. Infine $A \cap B \cap C = \{X_1 = X_2 = X_3\}$, quindi

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B)P(C).$$

ESERCIZIO 7. Supponiamo di avere un dado tetraedrico, cioè con 4 facce uguali, numerate da 1 a 4. Lo si lanci due volte, e si denoti con X la somma dei punteggi ottenuti, e con Y il punteggio massimo ottenuto. Si determini la densità congiunta di (X, Y).

SOLUZIONE. Denotiamo con X_1 il punteggio ottenuto al primo lancio, e con X_2 quello ottenuto al secondo. Useremo il fatto che due eventi del tipo $\{X_1 = h\}$ e $\{X_2 = k\}$ sono indipendenti. Iniziamo con il notare che la variabile casuale (X, Y) puo' assumere valori nel seguente insieme:

$$E := \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq \frac{m}{2} \leq n < m \leq 8 \right\}.$$

Se $(m, n) \in E$ e $m = 2n$ si ha

$$P(X = m, Y = n) = P(X_1 = n, X_2 = n) = \frac{1}{16}$$

Se invece $n > m/2$

$$P(X = m, Y = n) = P(X_1 = n, X_2 = m - n) + P(X_2 = n, X_1 = m - n) = \frac{1}{8}.$$

Riassumendo

$$p_{X,Y}(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{se } (m, n) \in E,\ m = 2n \\ \frac{1}{8} & \text{se } (m, n) \in E,\ m < 2n \\ 0 & \text{se } (m, n) \notin E. \end{cases}$$

ESERCIZIO 8. Dua mazzi di 40 carte sono ognuno costituito da 20 carte rosse e 20 nere. Si mescolano entrambi i mazzi, quindi si dispongono uno accanto all'altro. Cominciamo con lo scoprire la prima carta di entrambi i mazzi. Se entrambe sono rosse vinciamo un Euro, altrimenti non vinciamo alcunché. Scopriamo poi le seconde carte dei due mazzi: se sono entrambe rosse vinciamo un altro Euro, e così via. Sia X il numero di Euro vinti dopo aver scoperto tutto le carte. Calcolare la densità di X

SOLUZIONE. Per entrambi i mazzi numeriamo le carte da 1 a 40, e conveniamo che quelle rosse siano quelle numerate da 1 a 20. Denotando con $\sigma(i)$ la posizione della carta numero i del primo mazzo dopo il mescolamento, la disposizione delle carte del primo mazzo si può identificare con $\sigma \in S_{40}$. Analogamente, denotiamo con $\eta \in S_{40}$ la disposizione del secondo mazzo. Prendiamo quindi $\Omega := S_{40} \times S_{40}$, con la probabilità uniforme, e $X(\sigma, \eta)$ denota il numero di Euro vinti con le disposizioni σ, η. Per $k = 0, 1, \ldots, 20$,

$$P(X = k) = \frac{|\{(\sigma.\eta) : X(\sigma, \eta) = k\}|}{40!^2}.$$

Per calcolare $|\{(\sigma.\eta) : X(\sigma, \eta) = k\}|$ usiamo lo schema delle scelte successive: prima scegliamo σ (40! scelte possibili), poi scegliamo η in modo tale che $X(\sigma, \eta) = k$. Per determinare il numero di scelte possibili per η, sia $I_\sigma := \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(20)\}$. Un η tale che $X(\sigma, \eta) = k$ si può scegliere come segue.

- Si scelgono k carte rosse (del secondo mazzo): $\binom{20}{k}$ scelte.
- Si dispongono queste carte in I_σ: $\binom{20}{k}k!$ scelte.
- Le rimanenti $20 - k$ carte rosse si dispongono in I_σ^c: $\binom{20}{20-k}(20-k)!$ scelte.
- Si dispongono le 20 carte nere nei 20 posti rimasti liberi: 20! scelte.

Riassumendo

$$|\{X(\sigma, \eta) = k\}| = 40!\binom{20}{k}\binom{20}{k}k!\binom{20}{20-k}(20-k)!20!$$

da cui, con facili semplificazioni,

$$P(X = k) = \frac{\binom{20}{k}^2}{\binom{40}{20}}.$$