I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________
Laurea in Matematica	Nome: ______________
26 aprile 2012	Matricola: ______________

TEMA A

ESERCIZIO 1. Siano A, B, C tre eventi indipendenti. Mostrare che $A \setminus B$ e C sono eventi indipendenti. (È possibile usare tutti i risultati sull'indipendenza nel programma)

SOLUZIONE. Occorre mostrare che

$$P((A \setminus B) \cap C) = P(A \setminus B)P(C) \tag{1}$$

Si noti che $A \setminus B = A \cap B^c$. Usando il fatto che A, B^c, C sono indipendenti, si ha

$$P((A \setminus B) \cap C) = P(A \cap B^c \cap C) = P(A)P(B^c)P(C) = P(A \cap B^c)P(C) = P(A \setminus B)P(C).$$

ESERCIZIO 2. Sia $(B_n)_{n\geq 1}$ una successione di eventi. Definito

$$A_n := \bigcup_{k=1}^{n} B_k,$$

dimostrare che

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

SOLUZIONE.

Sia $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Quindi esiste m per cui $\omega \in A_m = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$, e quindi $\omega \in B_k$ per qualche $k \leq m$. Perciò $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, e ciò dimostra l'inclusione

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Per mostrare l'inclusione opposta, sia $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. Allora esiste m per cui $\omega \in B_m$. Essendo $B_m \subseteq A_m$, si ha $\omega \in A_m$, e quindi $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

ESERCIZIO 3. Consideriamo la passeggiata aleatoria in dimensione 1: $\Omega = \{-1, 1\}^{2n}$, $P =$ probabilità uniforme si Ω; se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in \Omega$, si pone $s_k := x_1 + x_2 + \cdots + x_k$. Determinare, motivando adeguatamente la risposta, $P(s_{2n} = 0)$.

SOLUZIONE. $s_{2n} = 0$ se e solo se la sequenza x ha esattamente n componenti uguali ad 1. Dunque gli elementi $x \in \{s_{2n} = 0\}$ sono in corrispondenza biunivoca con in sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ con n elementi. Perciò $|\{s_{2n} = 0\}| = \binom{2n}{n}$, da cui

$$P(s_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.$$

ESERCIZIO 4.

(a) Quante volte è necessario lanciare una moneta affinché la probabilità di ottenere almeno una testa sia maggiore di 0.95?

(b) E quante volte è necessario lanciarla affinché la probabilità di ottenere almeno due teste sia maggiore di 0.95?

SOLUZIONE.

(a) Lanciamo una moneta n volte. La probabilità di non ottenere alcuna testa è $\frac{1}{2^n}$. Dovrà quindi essere

$$\frac{1}{2^n} < 0.05 \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{\log\left(\frac{1}{0.05}\right)}{\log 2} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 5.$$

(b) Lanciamo una moneta n volte. La probabilità di ottenere al più una testa è

$$\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}.$$

Anche qui si stratta di determinare il minimo n per cui $\frac{n+1}{2^n} < 0.05$. Si vede facilmente che la funzione $x \mapsto \frac{x+1}{2^x}$ è decrescente per $x \geq 1$. Inoltre

$$\frac{7+1}{2^7} > 0.05 > \frac{8+1}{2^8}.$$

Perciò deve essere $n \geq 8$.

ESERCIZIO 5. Due carte vengono estratte da un mazzo di 52 carte da Poker. Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“entrambe le carte sono di cuori”} \\ B &= \text{“tra le due carte c'è almeno un asso”} \\ C &= \text{“tra le due carte c'è l'asso di cuori”}. \end{aligned}$$

Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$.

SOLUZIONE.

$$P(A) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} \simeq 0.058824$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}} \simeq 0.149321$$

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{\binom{51}{2}}{\binom{52}{2}} \simeq 0.038462$$

Si noti ora che $A \cap B = A \cap C =$ “una carta è l'asso di cuori e l'altra una delle altre tre di cuori. Perciò

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = \frac{12}{\binom{52}{2}} \simeq 0.009050.$$

Quindi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \simeq 0.060606$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \simeq 0.235291$$

ESERCIZIO 6. Si lancia tre volte un dado equilibrato. Sia X_i il punteggio ottenuto all'i-mo lancio. Consideriamo i tre eventi:

$$A := \{X_1 = X_2\} \quad B := \{X_1 = X_3\} \quad C := \{X_2 = X_3\}.$$

Mostrare che A e B sono indipendenti, così come A, C e B, C, ma i tre eventi A, B, C non sono indipendenti.

SOLUZIONE. Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, con la probabilità uniforme P.

$$|A| = |B| = |C| = 6 \cdot 6 = 36$$

(6 scelte per i due punteggi uguali, 6 per l'altro). Quindi

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}.$$

Inoltre $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{X_1 = X_2 = X_3\}$ che ha 6 elementi. Perciò

$$P(A \cap B) = \frac{6}{6^3} = P(A)P(B),$$

e quindi A e B sono indipendenti. Analogamente per gli altri due casi. Infine $A \cap B \cap C = \{X_1 = X_2 = X_3\}$, quindi

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B)P(C).$$

ESERCIZIO 7.

(a) Dimostrare che se $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, allora

$$\min_{i=1,2,\ldots n} x_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \max_{i=1,2,\ldots n} x_i.$$

(b) Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi disgiunti. Mostrare che

$$\min_{i=1,2,\ldots n} P(B|A_i) \leq P(B|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \max_{i=1,2,\ldots n} P(B|A_i).$$

SOLUZIONE.

(a) Sia $m := \min_{i=1,2,\ldots n} x_i$.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i m = m.$$

Analogamente per l'altra disuguaglianza.

(b)

$$\begin{aligned} P(B|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \frac{P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n))}{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(B|A_i), \end{aligned}$$

dove

$$\alpha_j := \frac{P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)}.$$

La conclusione segue dal punto precedente.

ESERCIZIO 8. L'urna A contiene 2 palline rosse e 4 verdi, l'urna B contiene 4 palline rosse e 2 verdi. Scelgo a caso una delle due urne, e da questa esegue $2n+1$ estrazioni con reimmissione. Consideriamo gli eventi: $E =$ "la maggioranza delle palline estratte sono rosse", $F =$ "l'urna scelta è la B". Usando il risultato dell'esercizio 7, mostrare che

$$\frac{2}{3} \leq P(F|E) \leq \frac{1}{1+2^{-1-2n}}.$$

SOLUZIONE. Sia $E_k =$ "tra le $2n+1$ palline estratte esattamente k sono rosse". Abbiamo

$$P(E_k|F) = \binom{2n+1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1-k},$$

$$P(E_k|F^c) = \binom{2n+1}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1-k}.$$

Perciò

$$P(F|E_k) = \frac{P(E_k|F)P(F)}{P(E_k|F)P(F) + P(E_k|F^c)P(F^c)}.$$

Tenuto conto che $P(F) = P(F^c) = \frac{1}{2}$

$$P(F|E_k) = \frac{\binom{2n+1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1-k}}{\binom{2n+1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1-k} + \binom{2n+1}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1-k}} = \frac{1}{1+2^{2n+1-2k}}.$$

Si osservi che

$$E = \bigcup_{k=n+1}^{2n+1} E_k,$$

e gli E_k sono ovviamente disgiunti. Quindi, per il risultato dell'esercizio 7,

$$\min_{k=n+1,\ldots,2n+1} \frac{1}{1+2^{2n+1-2k}} \leq P(F|E) \leq \max_{k=n+1,\ldots,2n+1} \frac{1}{1+2^{2n+1-2k}}.$$

L'espressione $\frac{1}{1+2^{2n+1-2k}}$ per $k = n+1, \ldots, 2n+1$, è massima per $k = 2n+1$, dove vale $\frac{1}{1+2^{-1-2n}}$, e minima per $k = n+1$ dove vare $\frac{2}{3}$.