Prova Scritta di Probabilità e Statistica	Cognome: ____________
Laurea in Matematica	Nome: ____________
24 settembre 2012	Matricola: ____________

ESERCIZIO 1. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità, e B un evento tale che $P(B) > 0$. Si dimostri che la mappa

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A|B) \end{array}$$

è una probabilità.

SOLUZIONE. Basta osservare che:

$$P(\Omega|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

e, per una successione di eventi disgiunti (A_n)

$$P(\cup_n A_n|B) = \frac{P(\cup_n (A_n \cap B))}{P(B)} = \sum_n \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_n P(A_n|B),$$

dove abbiamo usato che anche gli eventi $(A_n \cap B)$ sono disgiunti.

ESERCIZIO 2. Siano X, Z due variabili casuali definite nello stesso spazio di probabilità, e a valori in $[0, +\infty)$. Si dimostri che, per ogni $c > 0$,

$$E\left[Z\mathbf{1}_{\{X \geq c\}}\right] \leq \frac{E(ZX)}{c}.$$

SOLUZIONE. Vale la disuguaglianza

$$c\mathbf{1}_{\{X \geq c\}} \leq X,$$

e quindi anche

$$cZ\mathbf{1}_{\{X \geq c\}} \leq X \leq ZX.$$

Passando al valor medio nella precedente disuguaglianza, per la monotonia del valor medio, si conclude.

ESERCIZIO 3. Siano X e Y due variabili casuali indipendenti, assolutamente continue, con densità rispettivamente

$$f_X(x) = \frac{c_\alpha}{x^2} e^{-\alpha/x} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x),$$
$$f_Y(x) = \frac{c_\beta}{x^2} e^{-\beta/x} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x),$$

dove c_α e c_β sono due opportune costanti.

(a) Si determinino i valori delle costanti c_α e c_β.

(b) Si determinino le densità delle seguenti variabili casuali: $\max(X, Y)$, $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$.

SOLUZIONE.

(a) Si ha
$$c_\alpha^{-1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\alpha/x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ay} dy = \frac{1}{a},$$
cioè $c_\alpha = \alpha$.

(b) Anzitutto notiamo che, per $t > 0$
$$F_X(t) = \int_0^t \frac{\alpha}{x^2} e^{-\alpha/x} dx = \alpha \int_0^{1/t} e^{-ay} dy = e^{-\alpha/t}.$$
Perciò, posto $Z := \max(X, Y)$,
$$F_Z(t) = F_X(t) F_Y t) = e^{-\alpha/t} e^{-\beta/t} = e^{-(\alpha+\beta)/t}.$$
Perciò
$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \frac{(\alpha+\beta)}{x^2} e^{-(\alpha+\beta)/x}.$$
Posto poi $U := 1/X$, si ha, per $t > 0$
$$F_U(t) = P(X < 1/t) = e^{-\alpha t}.$$
Perciò $1/X \sim Exp(\alpha)$ e , analogamente, $1/Y \sim Exp(\beta)$. La densità g di $1/X + 1/Y$ è data dalla convoluzione (ci restringiamo a $z > 0$:
$$\begin{aligned} g(z) = \int_0^{+\infty} f_{1/X}(x) f_{1/Y}(z-x) dx &= \alpha\beta e^{-\beta z} \int_0^z e^{(\beta-\alpha)x} dx \\ &= \begin{cases} \alpha\beta \frac{e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}}{\beta - \alpha} & \text{per } \alpha \neq \beta \\ \alpha^2 z e^{-\alpha z} & \text{per } \alpha = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4. Siano $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim Be(1/2)$ variabili casuali indipendenti, e sia $Z := XY$.

(a) Si calcoli la funzione di ripartizione F_Z di Z.

(b) Mostrare che Z non è né una variabile casuale discreta né una variabile casuale assolutamente continua.

SOLUZIONE.

(a) Per $t \in (0,1)$
$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(Y = 1, X \leq t) + P(Y = 0) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}.$$
Perciò
$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

(b) Si noti che
$$\sum_x P(Z = x) = \sum_x [F_Z(x) - F_Z(x^-)] = 1/2,$$
quindi Z non può essere discreta. Inoltre non può essere assolutamente continua, poiché F_Z non è continua.

ESERCIZIO 5. Si dimostri che in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P), le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono indipendenti;
- le variabili casuali $\mathbf{1}_{A_1}, \mathbf{1}_{A_2}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$ sono indipendenti.

(Nota: tutte le proprietà note sull'indipendenza possono essere usate)

SOLUZIONE. Per note proprietà dell'indipendenza sappiamo che $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono indipendenti se e solo se per ogni scelta di eventi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ con $B_i \in \{A_i, A_i^c, \Omega, \emptyset\}$ si ha

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2) \cdots P(B_n). \tag{1}$$

Il fatto che

$$\mathbf{1}_{A_i}^{-1}(C) = \begin{cases} A_i & \text{se } 1 \in C, 0 \notin C \\ A_i^c & \text{se } 0 \in C, 1 \notin C \\ \Omega & \text{se } 1 \in C, 0 \in C \\ \emptyset & \text{se } 1 \notin C, 0 \notin C \end{cases}$$

mostra che (1) è equivalente all'affermazione: per ogni $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$P(\mathbf{1}_{A_1} \in C_1, \ldots, \mathbf{1}_{A_n} \in C_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\mathbf{1}_{A_k} \in C_k),$$

che a sua volta è proprio la definizione di indipendenza delle variabili casuali $\mathbf{1}_{A_1}, \mathbf{1}_{A_2}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$.

ESERCIZIO 6. Si estraggano a caso 5 carte in un mazzo di 52 carte da Poker. Si calcolino le seguenti probabilità:

(a) di avere esattamente un tris (tre carte dello stesso numero o figura, le altre due di numero o figura diversi dalle tre e tra loro);

(b) di avere *almeno* un tris;

(c) di avere almeno un tris sapendo che non si ha un poker (quattro carte dello stesso numero o figura);

(d) di avere almeno un tris sapendo che si ha almeno una coppia.

SOLUZIONE.

(a) Si tratta di scegliere: il numero per il tris (13 scelte), le tre carte per formare il tris ($\binom{4}{3} = 4$ scelte), i due numeri per le rimanenti due carte ($\binom{12}{2}$ scelte) da cui poi scegliere le due carte $4^2 = 16$ scelte. La probabilità richiesta è dunque

$$\frac{13 \cdot 4 \cdot \binom{12}{2} \cdot 16}{\binom{52}{5}} = \frac{88}{4165}$$

(b) La probabilità richiesta è la somma delle probabilità di fare esattamente un tris, di fare un full e di fare un poker. Con ragionamenti analoghi al precedente, la probabilità di fare un full è

$$\frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4165}$$

e quella di fare un Poker

$$\frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{4165}.$$

Quindi la probabilità richiesta è $\frac{95}{4165} = \frac{19}{833}$.

(c) Sia $A =$ "ho esattamente un tris", $B =$ " ho un full", $C =$ "ho un Poker". Dobbiamo calcolare

$$P(A \cup B \cup C | C^c) = \frac{P(A \cup B)}{1 - P(C)} = \frac{P(A) + P(B)}{1 - P(C)} = \frac{94}{4164} = \frac{47}{2082}.$$

(d) Sia $D =$" ho almeno una coppia". Il numero di elementi di D^c è il numero di modi di scegliere 5 carte di numeri diversi. Quindi

$$P(D^c) = \frac{\binom{13}{5} 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{2112}{4165}.$$

Allora

$$P(A \cup B \cup C | D) = \frac{P(A \cup B \cup C)}{P(D)} = \frac{95}{2112}.$$

ESERCIZIO 7. Siano $X \sim Ge(p)$ e $Y \sim Ge(q)$ variabili casuali indipendenti.

(a) Calcolare la probabilità $P(X < Y)$.

(b) Si calcoli la densità di

$$(Y - X)^+ := \begin{cases} Y - X & \text{se } Y \geq X \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

SOLUZIONE.

(a)

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = n, Y = k) = pq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^n (1-q)^k \\ &= p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n (1-q)^{n+1} = \frac{p(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)}. \end{aligned}$$

(b) Sia $n > 0$.

$$P((Y - X)^+ = n) = P(Y - X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = n + k)$$

$$= pq \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k (1-q)^{n+k} = \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)} (1-q)^n.$$

Infine

$$\begin{aligned} P((Y - X)^+ = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P((Y - X)^+ = n) = 1 - \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-q)^n \\ &= 1 - \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)} \frac{1-q}{q} = 1 - \frac{p(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 8. Siano X e Y due variabili casuali scalari, discrete, indipendenti, le cui funzioni generatrici dei momenti γ_X e γ_Y sono finite ovunque, cioè $\gamma_X(t) < +\infty$, $\gamma_Y(t) < +\infty$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Mostrare che la funzione generatrice γ_{XY} del prodotto XY, pur non essendo necessariamente finita, soddisfa le identità

$$\gamma_{XY}(t) = E\left[\gamma_X(tY)\right] = E\left[\gamma_Y(tX)\right].$$

SOLUZIONE. Usando il fatto che nelle somme infinite a termini positivi è lecito scambiare l'ordine di sommatoria:

$$\gamma_{XY}(t) = E\left[e^{tXY}\right] = \sum_{x,y\in\mathbb{R}} p_X(x)p_Y(y)e^{txy} = \sum_{x\in\mathbb{R}} p_X(x)\left[\sum_{y\in\mathbb{R}} e^{txy}p_Y(y)\right]$$
$$\sum_{x\in\mathbb{R}} p_X(x)E[\gamma_Y(tx)] = E\left[\gamma_Y(tX)\right].$$

Scambiando i ruoli di X e Y si ottiene l'altra identità.

ESERCIZIO 9. Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ e Y variabili casuali a valori in N, definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, e sia π una densità di probabilità su $\mathbb{N}$ (cioè $\pi(n) \geq 0$ e $\sum_n \pi(n) = 1$). Si assuma che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ valga la relazione

$$P(X_n = k | Y \leq n) = \pi(k).$$

(a) Si dimostri l'identità

$$P(X_n = k) - \pi(k) = -\left[\pi(k) - P(X_n = k|Y > n)\right] P(Y > n).$$

(b) Dedurre che

$$\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} |P(X_n = k) - \pi(k)| \leq P(Y \geq n),$$

e che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} |P(X_n = k) - \pi(k)| = 0.$$

SOLUZIONE.

(a)

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P(X_n = k, Y \leq n) + P(X_n = k, Y > n)\\
&= P(X_n = k|Y \leq n)P(Y \leq n) + P(X_n = k|Y > n)P(Y > n)\\
&= \pi(k)P(Y \leq n) + P(X_n = k|Y > n)P(Y > n)\\
&= \pi(k) - \pi(k)P(Y > n) + P(X_n = k|Y > n)P(Y > n),
\end{aligned}$$

da cui l'identità voluta segue immediatamente.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} |P(X_n = k) - \pi(k)| &\leq \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\pi(k) - P(X_n = k|Y > n)|\, P(Y > n)\\
&\leq \frac{1}{2}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \pi(k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X_n = k|Y > n)\right] P(Y > n)\\
&= P(Y > n).
\end{aligned}$$

Infine, l'ultima affermazione segue dal fatto che

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y > n) = 0.$$