

Prova Scritta di Probabilità e Statistica	Cognome: _____
Laurea in Matematica	Nome: _____
25 febbraio 2013	Matricola: _____

ESERCIZIO 1. Si mostri la seguente *formula di disintegrazione per la probabilità condizionata*: dati tre eventi A, B, C tali che $P(B \cap C) > 0$ e $P(B \cap C^c) > 0$, si ha

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap C^c)P(C^c|B).$$

Soluzione. Osservando che

$$P(A|B \cap C)P(C|B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)},$$

moltiplicando l'identità da dimostrare per $P(B)$, si mostra che è equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c)$$

che è vera per additività della probabilità.

ESERCIZIO 2. Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X < n) = 1.$$

Soluzione. Sia $A_n := \{X < n\}$. (A_n) forma una successione crescente di eventi, tali che $\cup_n A_n = \Omega$. La conclusione segue dalla continuità dal basso della probabilità.

ESERCIZIO 3.

Ho due dadi regolari: il dado α ha sei facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 6, mentre il dado β ha dodici facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 12. Scelgo uno dei due dadi a caso, con la stessa probabilità, e lo lancio per n volte, dove $n \in \mathbb{N}$ è un numero fissato.

- Qual è la probabilità che tutti i lanci diano come risultato il numero 3?
- Qual è la probabilità che tutti i lanci diano come risultato lo stesso numero?
- Se tutti i lanci danno come risultato il numero 3, qual è la probabilità che il dado scelto sia stato α ? Si mostri che tale probabilità (condizionata) è sempre strettamente maggiore di $\frac{1}{2}$ e se ne studi il comportamento per $n \rightarrow \infty$.

Soluzione.

- (a) Introduciamo gli eventi $A :=$ “il dado scelto è A ” e $C :=$ “tutti i lanci danno come risultato il numero 3”. Allora $P(A) = \frac{1}{2}$, mentre $P(C|A) = (\frac{1}{6})^n$ e $P(C|B) = (\frac{1}{12})^n$, da cui

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|A)P(A) + P(C|A^c)P(A^c) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{12}\right)^n \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{12}\right)^n \right\}. \end{aligned}$$

- (b) Introduciamo l'ulteriore evento $D :=$ “tutti i lanci danno come risultato lo stesso numero”. Allora $P(D|A) = 6(\frac{1}{6})^n$ mentre $P(D|B) = 12(\frac{1}{12})^n$, dunque

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|A^c)P(A^c) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \right\}.$$

- (c) Per la formula di Bayes

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{(\frac{1}{6})^n}{(\frac{1}{6})^n + (\frac{1}{12})^n} = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^n} = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

Dato che $2^n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n = 0$, segue che $P(A|C) > \frac{1}{2}$ e che $P(A|C) \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$.

ESERCIZIO 4. Siano A e B due eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) , tali che $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Consideriamo la variabile aleatoria

$$X := \lambda \mathbf{1}_A + \mu \mathbf{1}_B,$$

dove $\lambda, \mu > 0$. Si determini la densità discreta di X .

Soluzione. Notando che

$$X(\omega) = \begin{cases} \lambda & \text{se } \omega \in A \setminus B \\ \mu & \text{se } \omega \in B \setminus A \\ \lambda + \mu & \text{se } \omega \in A \cap B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha: $p_X(\lambda) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10}$, $p_X(\mu) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{15}$, $p_X(\lambda + \mu) = P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $p_X(0) = \frac{11}{30}$.

ESERCIZIO 5. Consideriamo una famiglia di urne, indicizzate dai numeri naturali incluso lo zero: l'urna k -esima, con $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, contiene 1 pallina nera e k palline bianche. Katia sceglie un numero casuale X , con distribuzione $Po(\lambda)$, e pesca una pallina a caso dall'urna numero X . Indichiamo con A l'evento “la pallina pescata da Katia è nera”.

- (a) Si determini $P(A|X = k)$, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$. Si deduca che $P(A) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.
- (b) Si determini $q(k) := P(X = k|A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$.
- (c) Si calcoli $E(X|A)$, ossia il valore atteso di X rispetto alla probabilità $P(\cdot|A)$.

Soluzione.

- (a) Per costruzione $P(A|X = k) = \frac{1}{k+1}$, quindi per la formula delle probabilità totali

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0} P(A|X = k)P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 - P(X = 0)) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \end{aligned}$$

avendo fatto il cambio di variabili $k+1 = m$.

- (b) Per la formula di Bayes

$$q(k) = \frac{P(A|X = k)P(X = k)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}{\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}.$$

- (c) Usando la formula per $q(k)$ ricavata sopra si ha

$$E(X|A) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k q(k) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!},$$

e scrivendo $k = (k+1) - 1$ si ottiene

$$E(X|A) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \left(\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \right) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} (\lambda e^{\lambda} - (e^{\lambda} - 1)) = \frac{\lambda - (1 - e^{-\lambda})}{1 - e^{-\lambda}}.$$

ESERCIZIO 6. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $U(0,1)$ e sia

$$Z := \frac{1}{X^r},$$

con $r \in \mathbb{R}$ parametro fissato.

- (a) Per quali valori di $p \in [1, \infty)$ si ha $E(|X|^p) < \infty$, ossia $X \in L^p$?
- (b) Si determini la distribuzione della variabile aleatoria X .

[Sugg. Si calcoli la funzione di ripartizione di X , separando i casi $r < 0$, $r = 0$ e $r > 0$.]

Soluzione.

(a)

$$E(|Z|^p) = \int_0^1 \omega^{-rp} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{1-rp} < \infty & \text{se } rp < 1 \\ +\infty & \text{se } rp \geq 1, \end{cases}$$

dato che una primitiva di ω^{-rp} è $\frac{1}{1-rp}\omega^{1-rp}$ se $rp \neq 1$ e $\log \omega$ se $rp = 1$. Quindi $Z \in L^p$ se e solo se $rp < 1$. Se $r \leq 0$, ciò significa che $Z \in L^p$ per ogni $p \in (0, \infty)$, mentre se $r > 0$ ciò significa che $Z \in L^p$ per ogni $p \in (0, \frac{1}{r})$ mentre $Z \notin L^p$ se $p \geq \frac{1}{r}$.

(b) Se $r = 0$ si ha chiaramente $Z(\omega) = 1$ per ogni ω , quindi in questo caso Z è una variabile aleatoria discreta con densità $p_X(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$.

Sia ora $r \neq 0$. Calcoliamo la funzione di ripartizione F_Z di Z . Chiamamente $F_Z(x) = 0$ per $x \leq 0$, perché $Z(\omega) > 0$ per q.o. $\omega \in \Omega$. Per $x > 0$ si ha

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X^{-r} \leq x).$$

Se $r > 0$ si ha $X^{-r} \leq x$ se e solo se $X \geq x^{-1/r}$, dunque

$$F_Z(x) = P(X \geq x^{-1/r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{1/r}} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Dato che F_Z è C^1 a tratti, segue che Z è assolutamente continua con densità

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{r} \frac{1}{x^{1+1/r}} \mathbf{1}_{(1, \infty)}(x).$$

Se invece $r < 0$ si ha $X^{-r} \leq x$ se e solo se $X \leq x^{-1/r} = x^{1/|r|}$, dunque

$$F_Z(x) = P(X^{-r} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^{1/|r|} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Quindi F_Z è C^1 a tratti e segue che Z è assolutamente continua con densità

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{|r|} x^{\frac{1}{|r|}-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x).$$

ESERCIZIO 7. L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. I tempi di attesa T_1 e T_2 per parlare con l'operatore sono, per entrambi i numeri, variabili aleatorie esponenziali, con media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che risponderà per primo.

- (a) Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?
 (b) Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Soluzione. a. Si noti che $T_i \sim \text{Exp}(1/15)$. Il tempo di attesa per la risposta è $T = \min(T_1, T_2) \sim \text{Exp}(2/15)$, da cui segue che $E(T) = 15/2$.

b.

$$P(T \leq 5) = 1 - e^{-\frac{2}{15}5} = 1 - e^{2/3}.$$

ESERCIZIO 8. Sia $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, con valor medio μ finito, che soddisfa la legge debole dei grandi numeri. Si mostri che per ogni funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua nel punto μ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[f(\bar{X}_n)] = f(\mu).$$

Soluzione. Sia $\epsilon > 0$ fissato ma arbitrario. Per continuità di f in μ , esiste δ tale che $|x - \mu| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\mu)| \leq \epsilon$. Sia, allora,

$$A_n := \{|\bar{X}_n - \mu| \leq \delta\}.$$

Per la legge debole dei grandi numeri sappiamo che

$$\lim_n P(A_n) = 1.$$

Allora, posto $M := \sup_x |f(x)|$,

$$\begin{aligned} |E[f(\bar{X}_n)] - \mu| &\leq E[|\bar{X}_n - \mu|] = E[|\bar{X}_n - \mu| \mathbf{1}_{A_n}] + E[|\bar{X}_n - \mu| \mathbf{1}_{A_n^c}] \\ &\leq \epsilon P(A_n) + (M + |\mu|)P(A_n^c), \end{aligned}$$

da cui

$$\limsup_n |E[f(\bar{X}_n)] - \mu| \leq \epsilon,$$

e si conclude per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$.

ESERCIZIO 9. Siano $A_1, \dots, A_n$ eventi di uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) . Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

In particolare, se $P(A_i \cap A_j) = 0$ per $i \neq j$, si deduca che $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

Soluzione. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare, mentre, per $n = 2$, il risultato segue dalla ben nota identità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Supponiamo ora l'identità vera per n .

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right). \quad (1)$$

Per ipotesi induttiva,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j),$$

mentre, per subadditività,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k \cap A_{n+1}).$$

Sostituendo in (1),

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &\geq \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(A_{n+1}) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) - \sum_{k=1}^n P(A_k \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) \end{aligned}$$