Esercizi - Fascicolo I

Esercizio 1 Siano A, B eventi. Si ricordi che $A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

a) Mostrare che
$$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

b) Siano A, B, C tre eventi. Mostrare che
$$P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C).$$
Mostrare inoltre che l'uguaglianza vale se e solo se $P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0$.

Soluzione.

a) Si noti che
$$A \cup B = (A\Delta B) \cup (A \cap B),$$
e quest'ultima è un'unione disgiunta. Perciò
$$P(A\Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B),$$
e si conclude usando la formula per $P(A \cup B)$.

b) Anzitutto si mostra che
$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C),$$
da cui la disuguaglianza segue per subadditività. Inoltre, si osservi che
$$[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] \setminus (A\Delta C) = (A\Delta B) \cap (B\Delta C).$$
Allora valgono le seguenti equivalenze:
$$P(A\Delta C) = P[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] \iff P\{[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] \setminus (A\Delta C)\} = 0 \iff$$
$$\iff P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0 \iff P[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] = P[(A\Delta B)] + P[(B\Delta C)].$$
Ne segue
$$P(A\Delta C) = P[(A\Delta B)] + P[(B\Delta C)] \iff P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0.$$

Esercizio 2 a) Siano A e B due eventi arbitrari. Mostrare la disuguaglianza
$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

b) Mostrare per induzione che per ogni n-pla di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $n \geq 2$ si ha

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Soluzione.

a) Basta osservare che

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

b) L'abbiamo dimostrato per $n = 2$ inoltre, per $n > 2$,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n] \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) + P(A_n) - 1 \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1), \end{aligned}$$

dove abbaimo prima usato il risultato per $n = 2$ e poi l'ipotesi induttiva.

Esercizio 3 Da un mazzo di 52 carte si estraggono, a caso, tre carte. Calcolare la probabilità che:

a. tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
b. le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
c. almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Soluzione.

a. Ω è l'insieme dei sottoinsiemi di tre elementi del mazzo di 52 carte, quindi $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Il numero di modi di scegliere 3 carte in modo che non vi sia alcun asso è $\binom{48}{3}$. Quindi, la probabilità richiesta è

$$1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

b. Sia A l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità. Scegliere un elemento di A significa i) scegliere 3 dei 4 colori disponibili ($\binom{4}{3}$ scelte) ii) una volta scelti i colori, ognuna delle 3 carte può essere scelta in 13 modi possibili. Dunque

$$|A| = \binom{4}{3} 13^3$$

che, divisa per $|\Omega|$, dà la probabilità richiesta.

c. Se B è l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità, B^c = le tre carte scelte hanno numero diverso. Scegliere un elemento di B^c significa scegliere i) tre numeri tra i 13 disponibili ($\binom{13}{3}$ scelte) ii) fissati i tre numeri ogni carta può essere scelta in 4 modi diversi. Dunque

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{13}{3} 4^3}{\binom{52}{3}}.$$

Esercizio 4 Un mazzo di 52 carte viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.
Soluzione.

Ci sono $\binom{52}{26}$ modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte, se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una parte in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. In definitiva:

$$P(\text{ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero}) = \frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.218126.$$

Esercizio 5 Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Calcolare la probabilità che:

a. nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);

b. nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Soluzione. Sia S l'insieme delle 52 carte, $\Omega := \{A \subseteq S : |A| = 5\}$, P la probabilità uniforme sui sottoinsiemi di Ω.

a. Sia $E =$ "nelle cinque carte estratte non c'è nessuna coppia". La scelta di un elemento di E^c può essere eseguita in due passi:

1. Si scelgono 5 numeri o figure *distinti*; questo può essere fatto in $\binom{13}{5}$ modi diversi.

2. Una volta eseguita la scelta in 1., si tratta di scegliere per ognuno dei 5 numeri o figure uno dei 4 rappresentanti; questo comporta 4^5 scelte distinte.

Abbiamo quindi visto che $|E^c| = 4^5\binom{13}{5}$. Pertanto

$$P(E) = 1 - \frac{4^5\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,492917167.$$

b. Sia F l'evento in questione. La scelta di un elemento di F si può eseguire in tre passi:

1. si sceglie il numero o figura per la coppia (13 scelte);

2. fissata la scelta in 1. si scelgono le due carte per la coppia ($\binom{4}{2}$ scelte);

3. fissate le scelte in 1. e 2. si scelgono 3 carte con numeri o figure distinti e diversi da quello usato per la coppia. Il numero di scelte si determina come al punto a., ma con 48 carte invece di 52 e 3 carte scelte invece di 5 ($4^3\binom{12}{3}$ scelte).

Quindi

$$P(F) = \frac{13\binom{4}{2}\,4^3\binom{12}{3}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,422569028.$$

Esercizio 6 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?
Soluzione. Possiamo scegliere $\Omega =$ insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti. Se A è l'evento in questione, A^c è l'insieme dei sottoinsiemi di r elementi degli $n - m$ biglietti non vincenti. Allora

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}}.$$

Esercizio 7 n paia di guanti vengono mescolate, e poi distribuite a caso a n persone. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?
Soluzione. Numeriamo i guanti da 1 a $2n$ (da 1 a n i guanti destri), e le persole da 1 a n. Se $\sigma \in S_{2n}$, la sequenza $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(2n))$ rappresenta l'ordine in cui i guanti vengono distribuiti, con la convenzione che $\sigma(2k-1), \sigma(2k)$ siano i guanti consegnati alla persona k. Denotiamo con P la probabilità uniforme su S_{2n}, e A l'evento che ognuno riceva un guanto destro e uno sinistro. Scegliamo un elemento di A tramite uno schema di scelte successive, scegliendo successuamente le coppie ordinate $(\sigma(2k-1), \sigma(2k))$, per $k = 1, 2, \ldots, n$. La prima coppia $(\sigma(1), \sigma(2))$ può essere scelta in $2n^2$ modi diversi: scegliendo prima un guanto destro (n modi) e poi uno sinistro (n modi), oppure viceversa. Similmente, il numero di scelte restanti per la coppia $(\sigma(2k-1), \sigma(2k))$ è $2(n-k+1)^2$. Ne segue che

$$|A| = 2^n (n!)^2,$$

e quindi

$$P(A) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Esercizio 8 Si considerino i numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$ e si esegua una permutazione casuale di essi. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?
Soluzione. Sia Ω l'insieme delle permutazioni degli n numeri. Per le permutazioni σ dell'evento A in questione, vi sono $n-1$ modi diversi di scegliere $\sigma(1)$, che determina anche il valore di $\sigma(2)$, mentre gli altri $\sigma(i)$, $i > 2$ si possono sciegliere a piacere in $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$, il che si può fare in $(n-2)!$ modi diversi. Dunque

$$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Esercizio 9 Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Mostrare che se $A \subset \Omega_1$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

Soluzione. È ovvio una volta osservato che

$$|A \times \Omega_2| = |A||\Omega_2|.$$

Esercizio 10 Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, diciamo che I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con

$A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Se P è la probabilità uniforme su S_n, calcolare $P(A_I)$.
Soluzione. Si osservi che I è stabile per σ se e solo se σ è dato dalla composizione di una permutazione di I con una permutazione di I^c. Quindi $|A_I| = |I|!(n - |I|)!$, da cui

$$P(A_I) = \frac{|I|!(n-|I|)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{|I|}}.$$

Esercizio 11 Fissato $n \geq 1$, consideriamo i punti del piano cartesiano $O = (0, 0)$ e $A = (2n, 2n)$. Consideriamo un cammino uscente da O in cui ad ogni "passo" ci si può muovere di un'unità verso destra o di un'unità verso l'alto. Un cammino che congiunge O e A è chiaramente un cammino di $4n$ passi in cui in esattamente $2n$ passi si va a destra, negli altri $2n$ verso l'alto. Sia Ω l'insieme dei cammini di $4n$ passi che congiungono O e A.

a. Quanto vale $|\Omega|$?

b. Sia E l'insieme dei cammini in Ω che passano per il punto $B = (n, n)$. Se P è la probabilità uniforme su Ω, calcolare $P(E)$.

Soluzione.

a. $|\Omega|$ è dato dal numero di modi di scegliere il sottoinsieme di $2n$ elementi dei $4n$ passi in cui spostarsi a destra, cioè $\binom{4n}{2n}$.

b. Un elemento di E è dato dalla concatenazione di un cammino da O a B con un cammino da B a A. Il numero di cammini da O a B (uguale al numero di quelli da B ad A) si calcola come al punto a., con n al posto di $2n$. Ne segue

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}.$$

Esercizio 12 Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Sia p_n la probabilità che gli n oggetti estratti siano tutti diversi.

a. Determinare p_n.

b. Usando la formula di Stirling, si determini il comportamento asintotico di p_n per $n \to +\infty$. In particolare, si mostri che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_n p_n/c\rho^n = 1$), e determinare i valori di c e ρ.

Soluzione.

a. Il numero di sequenze di n estrazioni in cui gli oggetti estratti siano tutti diversi è

$$2n(2n-1)\cdots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Perciò

$$p_n = \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}.$$

b. Usando la Formula di Stirling

$$p_n = \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}e^{\theta(2n)/12n}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta(n)/12n}(2n)^n} \sim \sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^n,$$

cioè $c = \sqrt{2}$ e $\rho = 2/e$.

Esercizio 13 Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

(a) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)

(b) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?

Soluzione.

(a) Sia

$$\Omega := \{(A_1, A_2, A_3) : A_i \subseteq \{1, 2, \ldots, 30\},\ |A_i| = 10,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j\},$$

e P la probabilità uniforme su Ω. Si noti che Ω è formato da *terne ordinate* di sottoinsiemi che formano una partizione. Non sarebbe affatto sbagliato considerare terne non ordinate. Non è restrittivo assumere che Giacomo, Claudio e Nicola corrispondano rispettivamente agli elementi $1, 2$ e 3 di $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Un elemento di Ω si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo A_1: $\binom{30}{10}$ scelte.
- Scelgo A_2 da $\{1, 2, \ldots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{20}{10}$ scelte.

Ovviamente A_3 resta determinato. Quindi

$$|\Omega| = \binom{30}{10}\binom{20}{10}.$$

Sia B = "Giacomo, Claudio e Nicola finiscono in tre gruppi distinti". Un elemento di B si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo 9 elementi per A_1 in $\{4, 5, \ldots, 30\}$: $\binom{27}{9}$ scelte.
- Scelgo 9 elementi per A_2 in $\{4, 5, \ldots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{18}{9}$ scelte.
- Scelgo come disporre $1, 2$ e 3 nei tre posti vuoti: $3! = 6$ scelte.

Dunque:

$$|B| = 6\binom{27}{9}\binom{18}{9} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{6\binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}}.$$

(b) Sia C = "Giacomo, Claudio e Nicola finiscono nello stesso gruppo". Un elemento di C si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo il gruppo in cui inserire $1, 2$ e 3: 3 scelte.
- Scelgo i rimanenti componenti di quel gruppo: $\binom{27}{7}$.
- Scelgo i componenti di uno (qualsiasi) degli altri due gruppi: $\binom{20}{10}$ scelte.

Dunque
$$P(C) = \frac{3\binom{27}{7}\binom{20}{10}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}} = \frac{3\binom{27}{7}}{\binom{30}{10}}.$$