Esercizi - Fascicolo I

Esercizio 1 Siano A, B eventi. Si ricordi che $A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

a) Mostrare che
$$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

b) Siano A, B, C tre eventi. Mostrare che
$$P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C).$$
Mostrare inoltre che l'uguaglianza vale se e solo se $P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0$.

Esercizio 2 a) Siano A e B due eventi arbitrari. Mostrare la disuguaglianza
$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

b) Mostrare per induzione che per ogni n-pla di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $n \geq 2$ si ha
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Esercizio 3 Da un mazzo di 52 carte si estraggono, a caso, tre carte. Calcolare la probabilità che:

a. tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
b. le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
c. almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Esercizio 4 Un mazzo di 52 carte viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Esercizio 5 Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Calcolare la probabilità che:

a. nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);

b. nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Esercizio 6 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Esercizio 7 n paia di guanti vengono mescolate, e poi distribuite a caso a n persone. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Esercizio 8 Si considerino i numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$ e si esegua una permutazione casuale di essi. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Esercizio 9 Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Mostrare che se $A \subset \Omega_1$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

Esercizio 10 Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, diciamo che I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con $A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Se P è la probabilità uniforme su S_n, calcolare $P(A_I)$.

Esercizio 11 Fissato $n \geq 1$, consideriamo i punti del piano cartesiano $O = (0, 0)$ e $A = (2n, 2n)$. Consideriamo un cammino uscente da O in cui ad ogni "passo" ci si può muovere di un'unità verso destra o di un'unità verso l'alto. Un cammino che congiunge O e A è chiaramente un cammino di $4n$ passi in cui in esattamente $2n$ passi si va a destra, negli altri $2n$ verso l'alto. Sia Ω l'insieme dei cammini di $4n$ passi che congiungono O e A.

a. Quanto vale $|\Omega|$?

b. Sia E l'insieme dei cammini in Ω che passano per il punto $B = (n, n)$. Se P è la probabilità uniforme su Ω, calcolare $P(E)$.

Esercizio 12 Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Sia p_n la probabilità che gli n oggetti estratti siano tutti diversi.

a. Determinare p_n.

b. Usando la formula di Stirling, si determini il comportamento asintotico di p_n per $n \to +\infty$. In particolare, si mostri che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_n p_n/c\rho^n = 1$), e determinare i valori di c e ρ.

Esercizio 13 Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

(a) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)

(b) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?