Esercizi - Fascicolo II

Esercizio 1 Siano A, B due eventi. Sapendo che $P(A|B) = 0.7$, $P(A|B^c) = 0.3$ e $P(B|A) = 0.6$, calcolare $P(A)$.
Soluzione. Posto $x = P(A)$, $y = P(B)$, per la formula delle probabilità totali

$$x = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.7y + 0.3(1 - y).$$

Inoltre, per la formula di Bayes,

$$0.6 = P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.7y}{x}.$$

Abbiamo ottenuto allora un sistema lineare in x, y, che si risolve ottenendo $x = 21/46$.

Esercizio 2 Mostrare, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $P(A|B) > P(A)$ e $P(A|B) < P(A)$ sono possibili.
Soluzione. Per il primo caso, basta considerare un evento B con $0 < P(B) < 1$ e prendere $A = B$. Per il secondo, si prenda un B come sopra, e $A = B^c$.

Esercizio 3 Siano A e B due eventi con probabilità non nulla. Diciamo che A *è positivamente correlato a* B se

$$P(A|B) \geq P(A).$$

Mostrare che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti.

a) A *è positivamente correlato a* B.

b) B *è positivamente correlato a* A.

c) A^c *è positivamente correlato a* B^c.

Soluzione. Si osservi che

$$P(A|B) \geq P(A) \iff P(A \cap B) \geq P(A)P(B) \iff P(B|A) \geq P(B),$$

che dimostra a) $\iff$ b). Inoltre

$$\begin{aligned} P(A|B) \geq P(A) &\iff P(A \cap B) \geq P(A)P(B) \\ &\iff P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A)[1 - P(B^c)] \iff P(A \cap B^c) \leq P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Ripetendo lo stesso argomento si trova

$$P(A \cap B^c) \leq P(A)P(B^c) \iff P(A^c \cap B^c) \geq P(A^c)P(B^c).$$

Mettende assieme queste ultime due equivalenze si conclude che a) $\iff$ c).

Esercizio 4 Il 2 per mille delle banconote da 50.000 Lire in corcolazione sono false. Una macchina riconosce come false il 98% delle banconote false e, per errore, l'1% di quelle autentiche.

a. Qual è la probabilità che una banconota presa a caso venga rilevata come falsa?

b. Qual è la probabilità che una banconota rilevata come falsa sia, in realtà , autentica?

Soluzione. Siano $A =$ la banconota è falsa, $B =$ la banconota è riconosciuta come falsa.

a.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.98 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998.$$

b. Basta usare la Formula di bayes

$$P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)}.$$

Esercizio 5 Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti tali che $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1$. Mostrare che esiste $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(A_k) = 1$.

Soluzione. Si ha

$$0 = P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c).$$

Perciò $\exists k$ tale che $P(A_k^c) = 0$, cioè $P(A_k = 1)$.

Esercizio 6 Un'urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

a. Si effettuano n estrazioni successive, *con* reintroduzione. Si considerino gli eventi

$$B_j = \text{"la } j\text{-esima pallina estratta è bianca"}$$

$$A_m = \text{"delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche"}$$

dove $m \leq n$. Calcolare $P(B_j|A_m)$.

b. Calcolare la probabilità condizionata del punto a. nel caso di estrazioni *senza* reintroduzione, supponendo che m sia tale che $P(A_m) > 0$.

Soluzione. Al solo scopo di semplificare la soluzione (ma si potrebbe fare altrimenti) consideriamo la seguente osservazione, valida sia per il punto a. che per il punto b. . Se si considera, nell'insieme Ω delle sequenze possibili di palline estratte, la funzione che scambia la prima pallina estratta con la j-esima, tale funzione è una corrispondenza biunivoca in Ω che manda A_m in sé e B_j in B_1, e quindi $B_j \cap A_m$ in $B_1 \cap A_m$. Poichè, sia in a. che in b., la probabilità su Ω è quella uniforme, tale trasformazione non cambia la probabilità degli eventi. In particolare $P(B_j \cap A_m) = P(B_1 \cap A_m)$. Non 'e dunque restrittivo assumere $j = 1$.

a. Si vede che $B_1 \cap A_m = B_1 \cap A'_m$ dove $A'_m =$ nelle successive $n-1$ estrazioni si estraggono $m-1$ palline bianche. Inoltre B_1 e A'_m sono indipendenti. Perciò

$$P(B_1 \cap A_m) = \frac{M_1}{M}\binom{n-1}{m-1}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{m-1}\left(1 - \frac{M_1}{M}\right)^{n-m}.$$

Dato che

$$P(A_m) = \binom{n}{m}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{m}\left(1 - \frac{M_1}{M}\right)^{n-m},$$

si trova facilmente

$$P(B_1|A_m) = \frac{P(B_1 \cap A_m)}{P(A_m)} = \frac{m}{n}.$$

b. Si noti che $P(A_m|B_1)$ coincide con la probabilità che da un'urna contenente $M-1$ palline di cui M_1-1 bianche si estraggano (senza reintroduzione) $m-1$ palline bianche in $n-1$ estrazioni. Perciò

$$P(A_m|B_1) = \frac{\binom{M_1-1}{m-1}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M-1}{n-1}}.$$

Essendo

$$P(A_m) = \frac{\binom{M_1}{m}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M}{n}}$$

e

$$P(B_1) = \frac{M_1}{M},$$

con facili calcoli si ha

$$P(B_1|A_m) = \frac{P(A_m|B_1)P(B_1)}{P(A_m)} = \frac{m}{n}.$$

Esercizio 7 Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathcal{F})$. Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Mostrare che

a. $A \cap B$ è indipendente da C.

b. $A \cup B$ è indipendente da C.

Soluzione.

a. Quasi ovvio:

$$P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B)P(C).$$

b. È equivalente dimostrare che $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ è indipendente da C. Poichè gli eventi A^c, B^c, C sono indipendenti, ci siamo ricondotti al caso precedente visto in a.

Esercizio 8 A tre studenti viene posta la stessa domanda. Supponiamo di sapere che il primo risponderà esattamente con probabilità $2/3$, il secondo con probabilità $1/2$, il terzo con probabilità $1/3$. Gli studenti non possono comunicare tra loro.

a. Se solo uno degli studenti dà la risposta esatta, qual è la probabilità che sia stato il primo?

b. Se due studenti hanno dato la risposta esatta, qual è la probabilità che il terzo abbia dato la risposta esatta?

Soluzione. Siano A_i = lo studente i-mo ha dato la risposta esatta, B = solo uno degli studenti ha dato la risposta esatta, C = esattamente due studenti hanno dato la risposta esatta.

a.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}.$$

b.

$$P(A_3|C) = \frac{P(A_3 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}.$$

Esercizio 9 * Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non abbiamo idea di quante siano le palline rosse, sicchè riteniamo che tutti i possibili valori $k = 1, 2, \ldots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

a. Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?

b. Si risponda alle medesima domanda posta in a., ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Soluzione. Siano A_k = nell'urna ci sono k palline rosse, B = la prima pallina estratta è rossa, C = le prime due palline estratte sono una rossa e una verde. Si noti che

$$P(B|A_k) = \frac{k}{n},\ P(C|A_k) = \frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}},\ P(A_k) = \frac{1}{n}.$$

a.

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n}\frac{1}{n}}{P(B)},$$

che assume il valore massimo per $k = n$.

b.

$$P(A_k|C) = \frac{P(C|A_k)P(A_k)}{P(C)} = \frac{\frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}}\frac{1}{n}}{P(C)},$$

che assume il valore massimo per $k = n/2$ se n è pari, altrimenti per $k = \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Esercizio 10 Ho un'urna inizialmente vuota e un insieme di palline numerate coi numeri naturali. Il primo giorno inserisco nell'urna le palline numero 1 e 2, dopodiché ne estraggo una a caso (nell'urna rimane dunque una sola pallina). Il secondo giorno inserisco nell'urna le palline numero 3 e 4, dopodiché estraggo a caso una delle tre palline contenute nell'urna. Itero dunque la procedura: l'i-esimo giorno inserisco nell'urna le palline numero $2i-1$ e $2i$, dopodiché estraggo a caso una delle $i+1$ palline contenute nell'urna.

Si introduca per $i \in \mathbb{N}$ l'evento

$$A_i := \text{la pallina numero 1 è presente nell'urna alla fine dell'}i\text{-esimo giorno}\,.$$

a) Si spieghi perchè vale l'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e si deduca la formula

$$P(A_n) \;=\; P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_{n-1})\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Si mostri che $P(A_n) = \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione.

a) L'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ è equivalente a $A_i^c \subseteq A_{i+1}^c$, che è immediatamente verificata: infatti se la pallina numero 1 non è presente nell'urna alla fine dell'i-esimo giorno, non potrà ovviamente essere presente alla fine dell'$(i+1)$-esimo.

La formula si dimostra per induzione: per $n \geq 1$, dato che $A_{n+1} \subseteq A_n$, si ha $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)$ e applicando l'ipotesi induttiva per $P(A_n)$ si conclude.

b) Chiaramente $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$ e più in generale $P(A_i|A_{i-1}) = \frac{i}{i+1}$. Applicando la formula dimostrata al punto a) si ha dunque

$$P(A_n) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1} \;=\; \frac{1}{n+1}\,.$$

Esercizio 11 Un commerciante acquista certe componenti elettriche in egual misura da due fornitori A e B. Viene a sapere che il 15% delle componenti provenienti da B e' difettosa, cioe' si rompono dopo poche ore di utilizzo, contro solo il 3% di quelle provenienti da A. Il commerciante e' in procinto di mettere in vendita una confezione tali componenti, tutte provenienti dallo stesso fornitore, ma di cui non ha registrato la provenienza. Per conoscerne la provenienza ne testa 20, di cui 2 risultano difettose. Con quale grado di confidenza puo' ritenere che la partita gli sia stata fornita da B?

Soluzione. Si considerino gli eventi A = la confezione proviene dal fornitore A, B = la confezione proviene dal fornitore B, C = di 20 pezzi testati 2 sono difettosi. Sappiamo che

$$P(C|A) = \binom{20}{2}(0.15)^2(0.85)^{18} \simeq 0.23, \qquad P(C|B) = \binom{20}{2}(0.03)^2(0.97)^{18} \simeq 0.099,$$

mentre $P(A) = P(B) = 1/2$. Per concludere basta applicare la formula di Bayes:

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C|B)P(B) + P(C|A)P(A)} \simeq 0.30.$$

Esercizio 12 Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche, contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità $1/2$ di essere prodotta dal primo macchinario, $1/4$ da secondo e $1/4$ dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole. Qual è la probabilità che trovi almeno un paio di occhiali difettoso?

Soluzione. Per $i = 1, 2, 3$, sia A_i = i pezzi della scatola sono stati prodotti dall'i-mo macchinario, B = almeno uno degli occhiali della scatola è difettoso. Sappiamo che

$$P(A_1) = 1/2,\ P(A_2) = P(A_3) = 1/4,$$

$$P(B|A_1) = 1 - P(B^c|A_1) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{100},\ P(B|A_2) = 1 - \left(\frac{199}{200}\right)^{100},\ P(B|A_3) = 1 - \left(\frac{299}{300}\right)^{100}$$

Per concludere, basta usare la formula delle probabilità totali:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i).$$

Esercizio 13 Un semplice modello per la distribuzione dei sessi dei figli è il seguente:

- il primo figlio ha proabilità $\frac{1}{2}$ di essere maschio (o femmina).
- La probabilità che l'$n+1$-esimo figlio sia maschio, condizionata ai sessi dei figli precedenti, è $\frac{3}{5}$ se l'n-esimo figlio è maschio, $\frac{2}{5}$ se l'n-esimo figlio è femmina.

Determinare

a) la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il secondo è maschio;

b)* la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il terzo è maschio.

Soluzione.

a) Introduciamo gli eventi $A =$ "il primo figlio è maschio" e $B =$ "il secondo figlio è maschio". I dati del problema ci dicono che $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{3}{5}$, $P(B|A^c) = \frac{2}{5}$. La formula delle probabilità totali dà

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Applicando quindi la formula di Bayes si ottiene

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\,.$$

b) Introducendo l'evento $C =$ "il terzo figlio è maschio", dobbiamo calcolare $P(A|C)$. Si osservi che

$$P(A|C) = P(A \cap B|C) + P(A \cap B^c|C).$$

Per la Formula di Bayes

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(C|A \cap B)P(A \cap B)}{P(C)}.$$

Anzitutto

$$P(C|A \cap B) = \frac{3}{5}.$$

Inoltre

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Infine, per la formula delle probabilità totali,

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|B^c)P(B^c) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Perciò

$$P(A \cap B|C) = \frac{\frac{3}{5}\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{9}{25}.$$

Lo stesso conto con B^c al posto di B conduce a

$$P(A \cap B^c|C) = \frac{4}{25},$$

da cui

$$P(A|C) = \frac{13}{25}.$$

Esercizio 14 Mostrare che se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi indipendenti, allora

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n P(A_n^c).$$

Soluzione.

$$P(\cup_i A_i) = 1 - P(\cap_i A_i^c) = 1 - \prod_i P(A_i^c).$$

Esercizio 15 Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n-k$ verdi, con $1 \leq k \leq n-1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

$$A_1 \ = \ \text{la prima pallina estratta è rossa}$$

$$A_2 \ = \ \text{la seconda pallina estratta è rossa.}$$

Mostrare che A_1 e A_2 non sono indipendenti
Soluzione. Basta osservare che

$$P(A_1|A_2) = \frac{k-1}{n-1} \neq \frac{k}{n} = P(A_1).$$

Esercizio 16 Si voglia illuminare una stanza con un dato numero di lampadine. La probabilita' che una lampadina sopravviva almeno n giorni e' p^n, ove $p = 0.9$. Si puo' ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine devo installare affinche', con probabilita' almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?
Soluzione. La probabilità che dopo 10 giorni tutte le N lampadine installate abbiano smesso di funzionare è

$$(1-p^{10})^N \leq 0.01 \iff N \geq \frac{\log(0.01)}{\log(1-p^{10})}.$$

Esercizio 17 Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado. Ora, se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Soluzione. Siano

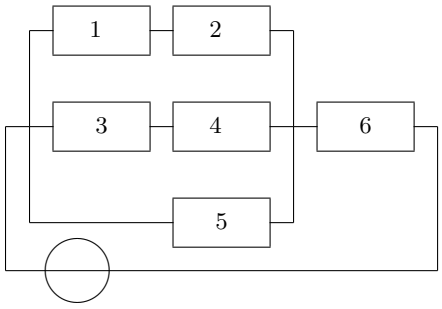
$T_i \equiv$ "*Rossi parte con l'i-esimo treno*",

$V \equiv$ "*Rossi parte per Roma*",

$N \equiv$ "*Rossi non prende nessuno dei primi 5 treni*"

$$P(T_i) = P(T_i|V)P(V) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$
$$P(N) = P(V^c) + P(T_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$
$$P(T_6 \mid N) = \frac{P(N \mid T_6)P(T_6)}{P(N)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}.$$

Esercizio 18 Si determini la probabilità che il circuito in figura sia "chiuso" supponendo che ciascun interruttore del circuito sia chiuso in modo indipendente e che la probabilità che l'i-esimo interruttore sia chiuso sia p_i, $i = 1, \ldots, 6$.



Soluzione.

Sia A l'evento "il circuito è chiuso", e A_i, $i = 1, \ldots, 6$ l'evento "l'interruttore i-esimo è chiuso", allora,

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \cap A_2 \cap A_6) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_6) \cup (A_5 \cap A_6) \\ &= [(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5] \cap A_6, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5) P(A_6) \\ &= (p_1p_2 + p_3p_4 + p_5 - p_1p_2p_5 - p_3p_4p_5 - p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4p_5)p_6. \end{aligned}$$

Esercizio 19 Siano date 2 urne U_1, U_2 tali che U_1 contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere, U_2 contiene 5 palline bianche e 5 nere. Un giocatore estrarre a caso 2 palline, seguendo una certa strategia, e vince 100.000 Lit se le due palline sono dello stesso colore.

(a) Quale delle seguenti tre strategie è preferibile per il giocatore:

   (a) Il giocatore sceglie a caso l'urna lanciando una moneta, estrae una pallina dall'urna, la rimette nell'urna, rilancia la moneta per scegliere nuovamente l'urna, quindi estrae la 2^a pallina.

   (b) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, la rimette nell'urna, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dalla stessa urna.

   (c) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dall'altra urna.

(b) Qual è la probabilità di vincere se le due estrazioni con reimmissione avvengono da un'unica urna contenente il tolale delle palline bianche e nere delle due urne?

Soluzione.

(a) L'insieme degli eventi elementari relativo all'esperimento "estrazione di 2 palline", è $\Omega = \{bb, bn, nb, nn\}$, indipendentemente dalla strategia adottata per selezionare le urne. Indichiamo con V_i l'evento "Vincere con la i-esima strategia," $i = 1, 2, 3$.

   (a) Con la prima strategia si hanno le seguenti 4 possibilità per selezionare le urne:

$$H_1 = U_1U_1, \quad H_2 = U_1U_2, \quad H_3 = U_2U_1, \quad H_4 = U_2U_2$$

con $\Pr(H_1) = \Pr(H_2) = \Pr(H_3) = \Pr(H_4) = 1/4$, dal momento che le scelte derivano da 2 lanci di 1 moneta regolare. Quindi,

$$\Pr(\{bb\}) = \sum_{i=1}^{4} \Pr(\{bb\}|H_i) \Pr(H_i);$$

$$\Pr(\{bb\}|H_1) =$$
$$= \Pr(\text{“estrarre con reimmissione 2 palline bianche dalla prima urna”})$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$\Pr(\{bb\}|H_2) =$$
$$= \Pr(\text{“estrarre 1 pallina bianca dalla prima urna e 1 nera dalla seconda”})$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10} = P(\{bb\}|H_3)$$

$$\Pr(\{bb\}|H_4) =$$
$$= \Pr(\text{“estrarre con reimmissione 2 palline bianche dalla seconda urna”})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Quindi $\Pr(\{bb\}) = 49/400$.
Allo stesso modo si dimostra che $\Pr(\{nn\}) = 1/4(16/25 + 4/5 + 1/4) = 169/400$, da cui: $\Pr(V_1) = 218/400 = \frac{109}{200} = 0.545$.

(b) Con la seconda strategia, una volta effettuata la scelta dell'urna per la prima estrazione, si effettueranno 2 estrazioni da quell'urna con reimmissione. Così,

$$\begin{aligned}
\Pr(\{bb\}) &= \Pr(\{bb\}|U_1)P(U_1) + \Pr(\{bb\}|U_2)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{200} \\
\Pr(\{nn\}) &= \Pr(\{nn\}|U_1)\Pr(U_1) + \Pr(\{nn\}|U_2)P(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{89}{200} \\
\Pr(V_2) &= \frac{118}{200} = \frac{59}{100} = 0.59.
\end{aligned}$$

(*c*) Con la terza strategia, scelta l'urna per la prima estrazione, si effettuera la seconda estrazione dall'altra urna. Così,

$$\begin{aligned}
\Pr(\{bb\}) &= \Pr(\{bb\}|U_1U_2)\Pr(U_1) + \Pr(\{bb\}|U_2U_1)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\big(\frac{1}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{5}\big) = \frac{1}{10} \\
\Pr(\{nn\}) &= \Pr(\{nn\}|U_1U_2)\Pr(U_1) + \Pr(\{nn\}|U_2U_1)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\big(\frac{4}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{4}{5}\big) = \frac{2}{5} \\
\Pr(V_3) &= \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} = 0.5.
\end{aligned}$$

È preferibile la seconda strategia.

(b) Sia U_3 un'urna che contiene 6 palline bianche e 9 palline nere. Con quest'urna, si ha $\Pr(\text{“vincere”}) = (6/15)^2 + (9/15)^2 = \frac{13}{25} = 0.52$.

Esercizio 20 Mostrare la *formula di disintegrazione per probabilità condizionate*, cioè, dati tre eventi A, B, C tali che $P(B \cap C) > 0$ e $P(B \cap C^c) > 0$, si ha

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap C^c)P(C^c|B).$$

Soluzione. Non è difficile verificarlo usando la definizione di probabilità condizionata. Un altro modo è il seguente. Per un generico evento E definiamo $Q(E) := P(E|B)$. Sappiamo che Q è una probabilità. Si vede subito che

$$Q(A|C) = P(A|B \cap C) \quad \text{e} \quad Q(A|C^c) = P(A|B \cap C^c).$$

Quindi la formula da dimostrare non è altro che la formula di disintegrazione per la probabilità Q.

Esercizio 21 * Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia n figli, con $n \geq 0$, è $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, dove $\lambda > 0$. Supponiamo inoltre che ogni figlio sia maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri figli. Fissato $k \geq 0$, sia A_k l'evento “il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente k figli maschi”. Mostrare che $P(A_k) = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$. (sugg.: sia $B_n =$ “il nucleo familiare scelto ha n figli. Prima determinare $P(A_k|B_n)$ e poi calcolare $P(A_k)$ con la formula di disintegrazione

$$P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k|B_n)P(B_n).$$

Ricordare la serie esponenziale $e^\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.
Soluzione. Dalle ipotesi del modello segue che, se $n \geq k$,

$$P(A_k|B_n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

Ovviamente, $P(A_k|B_n) = 0$ se $k > n$. Pertanto

$$P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k|B_n)P(B_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda}\frac{1}{2^k}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-k}}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda/2)^n}{n!} = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$$

Esercizio 22 Sia $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Omega := \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$, e P la probabilità uniforme su Ω. Dunque gli elementi di Ω sono coppie ordinate (A, B), con $A, B \subseteq S$. Consideriamo l'evento

$$E := \{(A, B) \in \Omega : A \subseteq B\}.$$

Inoltre, se $B \subseteq S$, sia $F_B := \{(A, B) : A \subset \Omega\}$.

a. Determinare $P(E|F_B)$.

b. * Usando la formula di disintegrazione

$$P(E) = \sum_{B\subseteq S} P(E|F_B)P(F_B),$$

mostrare che $P(E) = (3/4)^n$ (ricordare che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$).

Soluzione. a. Anzitutto

$$P(E|F_B) = \frac{|E \cap F_B|}{|F_B|}.$$

Gli elementi di F_B sono tanti quanti i sottoinsiemi di S, cioè 2^n. Gli elementi di $E \cap F_B$ sono tanti quanti i sottoinsiemi di B, cioè $2^{|B|}$. Dunque

$$P(E|F_B) = \frac{2^{|B|}}{2^n}.$$

b. Essendo $P(F_B) = |F_B|/|\Omega| = 1/2^n$, si ha

$$P(E) = \sum_{B\subseteq S}\frac{2^{|B|}}{4^n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{B\subseteq S:|B|=k} 2^k = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \frac{3^n}{4^n}.$$

Esercizio 23 È stato indetto un referendum in una popolazione di $n \geq 1$ individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SÌ con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri.

a) Si fissi un individuo. Qual è la probabilità p che egli vada a votare e voti SÌ?

b) Qual è la probabilità che il numero di voti SÌ sia k, per $k \in \{0, \ldots, n\}$? (*Sugg.*: può essere utile basarsi sulla risposta data al punto precedente.)

c) Assumendo che i voti SÌ siano k, si determini la probabilità (condizionata) che i votanti totali siano m, dove $m \in \{k, \dots, n\}$. Si mostri che tale probabilità vale

$$\binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} .$$

Soluzione.

a) Consideriamo gli eventi $A =$ "l'individuo va a votare" e $B =$ "l'individuo vota SÌ". Allora

$$p = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} .$$

b) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $C =$ "esattamente k individui vanno a votare e votano SÌ". Dato che ciascun individuo, indipendentemente dagli altri, va a votare e vota SÌ con probabilità $p = \frac{1}{4}$, siamo in presenza di uno schema di prove ripetute e indipendenti: dunque

$$P(C) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} .$$

c) Introducendo l'evento $D =$ "esattamente m individui vanno a votare", dobbiamo calcolare $P(D|C)$. Applicando la formula di Bayes

$$P(D|C) = \frac{P(C|D) \cdot P(D)}{P(C)} .$$

Applicando lo schema di prove ripetute e indipendenti si ha

$$P(D) = \binom{n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} , \qquad P(C|D) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{m} ,$$

mentre $P(C)$ è stata determinata al punto precedente. Sostituendo ed effettuando le opportune semplificazioni, si trova

$$P(D|C) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{m}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^m (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^k (\frac{3}{4})^{n-k}} = \binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} .$$

Esercizio 24 Una Compagnia di Assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La Compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: "basso rischio", "medio rischio" e "alto rischio". Dei suoi assicurati, il 75% sono a "basso rischio", il 20% a "medio rischio" e il restante 5% ad "alto rischio". Gli assicurati a "basso rischio" hanno una probabilità pari a 0.02 di subire un danno che prevede il pagamento dell'assicurazione. Tale probabilità è pari a 0.1 per gli assicurati a "medio rischio" e a 0.2 per quelli ad "alto rischio".

i) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell'assicurazione?

ii) Se un individuo reclama il pagamento dell'assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad "alto rischio"?

Soluzione.

i) Consideriamo gli eventi: A_1 = "l'individuo scelto è della categoria "basso rischio"; A_2 = "l'individuo scelto è della categoria "medio rischio"; A_3 = "l'individuo scelto è della categoria "alto rischio"; B = "l'individuo reclama il pagamento dell'assicurazione". Sappiamo che

$$P(B|A_1) = 0.02 \quad P(B|A_2) = 0.1 \quad P(B|A_3) = 0.2$$
$$P(A_1) = 0.75 \quad P(A_2) = 0.2 \quad P(A_3) = 0.05.$$

Per la formula delle probabilità totali

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i) = 0.02 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.045.$$

ii) Usando la Formula di Bayes,

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.045} = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 25 Antonio e Berta si incontrano per una gara di scacchi. Convengono di fare due partite, assegnando punti nel solito modo, cioè un punto per ogni partita vinta, zero punti per partite perse, mezzo punto in caso di pareggio o patta. Se dopo le due partite i due giocatori hanno uguale punteggio, lanceranno una moneta equilibrata per determinare il vincitore della gara. Antonio sa giocare con due diversi approcci, uno offensivo e uno difensivo, mentre Berta gioca sempre in maniera offensiva. Se Antonio gioca in maniera offensiva, vince con probabilità $p \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - p$. Se invece gioca in maniera difensiva, pareggia con probabilità $q \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - q$.

Antonio decide di adottare la seguente strategia. Gioca la prima partita in maniera offensiva. Se perde, gioca anche la seconda in maniera offensiva, se vince gioca la seconda partita in maniera difensiva.

(a) Calcolare, in termini di p e q, la probabilità p_* che Antonio vinca la gara.

(b) Si assuma $q = 0.9$. Per quali valori di p si ha $p_* > \frac{1}{2}$? E' possibile che Berta sia la giocatrice più forte (nel senso di avere maggiore probabilità di vincere una partita rispetto ad Antonio) e ciononostante Antonio abbia maggiore probabilità di vincere la gara?

Soluzione.

(a) Antonio vince la gara se si verifica una delle seguenti alternative:

- vince la prima partita e pareggia la seconda;
- vince la prima partita, perde la seconda, e vince nel lancio della moneta;
- perde la prima partita, vince la seconda, e vince nel lancio della moneta.

Pertanto

$$p_* = pq + \frac{1}{2}p(1 - q) + \frac{1}{2}p(1 - p).$$

(b) Posto $q = 0.9$, si ha $pq + \frac{1}{2}p(1-q) + \frac{1}{2}p(1-p) > \frac{1}{2}$ se e solo se $p > 0.4$. Quindi se $p \in (0.4, 0.5)$, Berta è più forte ma Antonio ha maggiore probabilità di vincere la gara.

Esercizio 26 Una fabbrica produce RAM che possono avere due tipi di difetti: il difetto A e il difetto B. Il responsabile per la qualità della fabbrica afferma, dall'esperienza passata, che la probabilità che una RAM abbia almeno uno dei due difetti è pari a 0,3; la probabilità che abbia il difetto A ma non il B è pari a 0,1; la probabilità che abbia contemporaneamente i due difetti è pari a 0,2. Calcolare la probabilità che una RAM abbia:

a) il difetto A;

b) il difetto B;

c) il difetto A, dato che si è riscontrato che non abbia il difetto B.

Soluzione. Consideriamo gli eventi: $A =$ "è presente il difetto A, $B =$ "è presente il difetto B. Sappiamo che: $P(A \cup B) = 0.3$, $P(A \setminus B) = 0.1$, $P(A \cap B) = 0.2$.

a)
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B) = 0.3.$$

b)
$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.2.$$

c)
$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A \setminus B)}{1 - P(B)} = \frac{0.1}{0.8} = \frac{1}{8}.$$

Esercizio 27 Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l'altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell'incidente era giallo. Sappiamo che

- I taxi bianchi sono l'85% dei taxi in città.
- La probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore de taxi e' 0.8.

(a) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

(b) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell'identificazione corretta del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella dell'altro. Data questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

Soluzione.

(a) Consideriamo gli eventi: $A =$ "il taxi coinvolto è bianco", $B =$ "il testimone dichiara di aver visto un taxi giallo". Sappiamo che $P(A) = 0.85$, $P(B|A) = 0.2$, $P(B|A^c) = 0.8$. Perciò
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{17}{29}.$$

(b) Sia $C =$ "il secondo testimone dichiara di aver visto un taxi giallo". Per ipotesi $P(B \cap C|A) = (0.2)^2 = 0.04$, e $P(B \cap C|A^c) = (0.8)^2 = 0.64$. Allora

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(B \cap C|A)P(A)}{P(B \cap C|A)P(A) + P(B \cap C|A^c)P(A^c)} = \frac{17}{65}.$$

Esercizio 28 Tre urne contengono ognuna 10 palline. Due di esse contengono 5 palline rosse e 5 blu, la terza 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale delle tre urne sia quella con 3 palline rosse. Estraiamo 2 palline da ognuna delle tre urne, ottenendo il seguente risultato: da un'urna abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, da un'altra due palline rosse a dalla terza due palline blu. Qual è la probabilità che l'urna da cui abbiamo estratto due palline blu sia quella contenente tre palline rosse?

Soluzione. Chiamiamo U_1 l'urna da cui abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, U_2 quella da cui abbiamo estratto due palline rosse, e U_3 la rimanente. Per $i = 1, 2, 3$, denotiamo con A_i l'eventi "l'urna contenente 3 palline rosse è l'urna U_i". Sia inoltre B l'evento " da un'urna abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, da un'altra due palline rosse a dalla terza due palline blu". Abbiamo:

$$\begin{aligned} P(A_3|B) &= \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{\frac{25}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}}{\frac{21}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{25}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{25}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}} \simeq 0.648. \end{aligned}$$