

Esercizi - Fascicolo II

Esercizio 1 Siano A, B due eventi. Sapendo che $P(A|B) = 0.7$, $P(A|B^c) = 0.3$ e $P(B|A) = 0.6$, calcolare $P(A)$.

Esercizio 2 Mostrare, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $P(A|B) > P(A)$ e $P(A|B) < P(A)$ sono possibili.

Esercizio 3 Siano A e B due eventi con probabilità non nulla. Diciamo che A è *positivamente correlato* a B se

$$P(A|B) \geq P(A).$$

Mostrare che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti.

- a) A è *positivamente correlato* a B .
- b) B è *positivamente correlato* a A .
- c) A^c è *positivamente correlato* a B^c .

Esercizio 4 Il 2 per mille delle banconote da 50.000 Lire in circolazione sono false. Una macchina riconosce come false il 98% delle banconote false e, per errore, l'1% di quelle autentiche.

- a. Qual è la probabilità che una banconota presa a caso venga rilevata come falsa?
- b. Qual è la probabilità che una banconota rilevata come falsa sia, in realtà, autentica?

Esercizio 5 Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti tali che $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1$. Mostrare che esiste $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $P(A_k) = 1$.

Esercizio 6 Un'urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

- a. Si effettuano n estrazioni successive, *con* reintroduzione. Si considerino gli eventi

$$B_j = \text{"la } j\text{-esima pallina estratta è bianca"}$$

$$A_m = \text{"delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche"}$$

dove $m \leq n$. Calcolare $P(B_j|A_m)$.

- b. Calcolare la probabilità condizionata del punto a. nel caso di estrazioni *senza* reintroduzione, supponendo che m sia tale che $P(A_m) > 0$.

Esercizio 7 Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathcal{F})$. Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Mostrare che

- a. $A \cap B$ è indipendente da C .
- b. $A \cup B$ è indipendente da C .

Esercizio 8 A tre studenti viene posta la stessa domanda. Supponiamo di sapere che il primo risponderà esattamente con probabilità $2/3$, il secondo con probabilità $1/2$, il terzo con probabilità $1/3$. Gli studenti non possono comunicare tra loro.

a. Se solo uno degli studenti dà la risposta esatta, qual è la probabilità che sia stato il primo?

b. Se due studenti hanno dato la risposta esatta, qual è la probabilità che il terzo abbia dato la risposta esatta?

Esercizio 9 * Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non abbiamo idea di quante siano le palline rosse, sicché riteniamo che tutti i possibili valori $k = 1, 2, \dots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

a. Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?

b. Si risponda alle medesima domanda posta in a., ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Esercizio 10 Ho un'urna inizialmente vuota e un insieme di palline numerate coi numeri naturali. Il primo giorno inserisco nell'urna le palline numero 1 e 2, dopodiché ne estraggo una a caso (nell'urna rimane dunque una sola pallina). Il secondo giorno inserisco nell'urna le palline numero 3 e 4, dopodiché estraggo a caso una delle tre palline contenute nell'urna. Itero dunque la procedura: l' i -esimo giorno inserisco nell'urna le palline numero $2i - 1$ e $2i$, dopodiché estraggo a caso una delle $i + 1$ palline contenute nell'urna.

Si introduca per $i \in \mathbb{N}$ l'evento

$A_i :=$ la pallina numero 1 è presente nell'urna alla fine dell' i -esimo giorno.

a) Si spieghi perchè vale l'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e si deduca la formula

$$P(A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Si mostri che $P(A_n) = \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 11 Un commerciante acquista certe componenti elettriche in egual misura da due fornitori A e B. Viene a sapere che il 15% delle componenti provenienti da B è difettosa, cioè si rompono dopo poche ore di utilizzo, contro solo il 3% di quelle provenienti da A. Il commerciante è in procinto di mettere in vendita una confezione tali componenti, tutte provenienti dallo stesso fornitore, ma di cui non ha registrato la provenienza. Per conoscerne la provenienza ne testa 20, di cui 2 risultano difettose. Con quale grado di confidenza può ritenere che la partita gli sia stata fornita da B?

Esercizio 12 Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche, contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità $1/2$ di essere prodotta dal primo macchinario, $1/4$ da secondo e $1/4$ dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole. Qual è la probabilità che trovi almeno un paio di occhiali difettoso?

Esercizio 13 Un semplice modello per la distribuzione dei sessi dei figli è il seguente:

- il primo figlio ha probabilità $\frac{1}{2}$ di essere maschio (o femmina).
- La probabilità che l' $n+1$ -esimo figlio sia maschio, condizionata ai sessi dei figli precedenti, è $\frac{3}{5}$ se l' n -esimo figlio è maschio, $\frac{2}{5}$ se l' n -esimo figlio è femmina.

Determinare

- la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il secondo è maschio;
- * la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il terzo è maschio.

Esercizio 14 Mostrare che se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi indipendenti, allora

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n P(A_i^c).$$

Esercizio 15 Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n-k$ verdi, con $1 \leq k \leq n-1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

A_1 = la prima pallina estratta è rossa

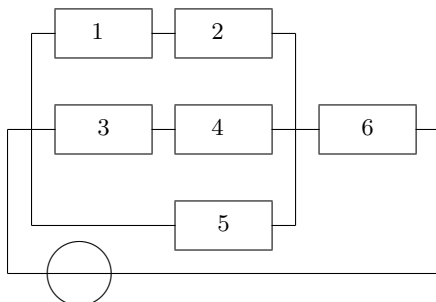
A_2 = la seconda pallina estratta è rossa.

Mostrare che A_1 e A_2 non sono indipendenti

Esercizio 16 Si voglia illuminare una stanza con un dato numero di lampadine. La probabilità che una lampadina sopravviva almeno n giorni è p^n , ove $p = 0.9$. Si può ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine devo installare affinché, con probabilità almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?

Esercizio 17 Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado. Ora, se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Esercizio 18 Si determini la probabilità che il circuito in figura sia "chiuso" supponendo che ciascun interruttore del circuito sia chiuso in modo indipendente e che la probabilità che l' i -esimo interruttore sia chiuso sia p_i , $i = 1, \dots, 6$.



Esercizio 19 Siano date 2 urne U_1, U_2 tali che U_1 contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere, U_2 contiene 5 palline bianche e 5 nere. Un giocatore estrarre a caso 2 palline, seguendo una certa strategia, e vince 100.000 Lit se le due palline sono dello stesso colore.

(a) Quale delle seguenti tre strategie è preferibile per il giocatore:

- (a) Il giocatore sceglie a caso l'urna lanciando una moneta, estrae una pallina dall'urna, la rimette nell'urna, rilancia la moneta per scegliere nuovamente l'urna, quindi estrae la 2^a pallina.
- (b) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, la rimette nell'urna, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dalla stessa urna.
- (c) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dall'altra urna.

(b) Qual è la probabilità di vincere se le due estrazioni con reimmissione avvengono da un'unica urna contenente il totale delle palline bianche e nere delle due urne?

Esercizio 20 Mostrare la *formula di disintegrazione per probabilità condizionate*, cioè, dati tre eventi A, B, C tali che $P(B \cap C) > 0$ e $P(B \cap C^c) > 0$, si ha

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap C^c)P(C^c|B).$$

Esercizio 21 * Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia n figli, con $n \geq 0$, è $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, dove $\lambda > 0$. Supponiamo inoltre che ogni figlio sia maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri figli. Fissato $k \geq 0$, sia A_k l'evento "il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente k figli maschi". Mostrare che $P(A_k) = e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}$. (sugg.: sia B_n = "il nucleo familiare scelto ha n figli. Prima determinare $P(A_k|B_n)$ e poi calcolare $P(A_k)$ con la formula di disintegrazione

$$P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k|B_n)P(B_n).$$

Ricordare la serie esponenziale $e^\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Esercizio 22 Sia $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Omega := \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$, e P la probabilità uniforme su Ω . Dunque gli elementi di Ω sono coppie ordinate (A, B) , con $A, B \subseteq S$. Consideriamo l'evento

$$E := \{(A, B) \in \Omega : A \subseteq B\}.$$

Inoltre, se $B \subseteq S$, sia $F_B := \{(A, B) : A \subset \Omega\}$.

a. Determinare $P(E|F_B)$.

b. * Usando la formula di disintegrazione

$$P(E) = \sum_{B \subseteq S} P(E|F_B)P(F_B),$$

mostrare che $P(E) = (3/4)^n$ (ricordare che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$).

Esercizio 23 È stato indetto un referendum in una popolazione di $n \geq 1$ individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SÌ con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri.

- a) Si fissi un individuo. Qual è la probabilità p che egli vada a votare e voti SÌ?
- b) Qual è la probabilità che il numero di voti SÌ sia k , per $k \in \{0, \dots, n\}$? (*Sugg.*: può essere utile basarsi sulla risposta data al punto precedente.)
- c) Assumendo che i voti SÌ siano k , si determini la probabilità (condizionata) che i votanti totali siano m , dove $m \in \{k, \dots, n\}$. Si mostri che tale probabilità vale

$$\binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}.$$

Esercizio 24 Una Compagnia di Assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La Compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: “basso rischio”, “medio rischio” e “alto rischio”. Dei suoi assicurati, il 75% sono a “basso rischio”, il 20% a “medio rischio” e il restante 5% ad “alto rischio”. Gli assicurati a “basso rischio” hanno una probabilità pari a 0.02 di subire un danno che prevede il pagamento dell’assicurazione. Tale probabilità è pari a 0.1 per gli assicurati a “medio rischio” e a 0.2 per quelli ad “alto rischio”.

- i) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell’assicurazione?
- ii) Se un individuo reclama il pagamento dell’assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad “alto rischio”?

Esercizio 25 Antonio e Berta si incontrano per una gara di scacchi. Convengono di fare due partite, assegnando punti nel solito modo, cioè un punto per ogni partita vinta, zero punti per partite perse, mezzo punto in caso di pareggio o patta. Se dopo le due partite i due giocatori hanno uguale punteggio, lanceranno una moneta equilibrata per determinare il vincitore della gara. Antonio sa giocare con due diversi approcci, uno offensivo e uno difensivo, mentre Berta gioca sempre in maniera offensiva. Se Antonio gioca in maniera offensiva, vince con probabilità $p \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - p$. Se invece gioca in maniera difensiva, pareggia con probabilità $q \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - q$.

Antonio decide di adottare la seguente strategia. Gioca la prima partita in maniera offensiva. Se perde, gioca anche la seconda in maniera offensiva, se vince gioca la seconda partita in maniera difensiva.

- (a) Calcolare, in termini di p e q , la probabilità p_* che Antonio vinca la gara.
- (b) Si assuma $q = 0.9$. Per quali valori di p si ha $p_* > \frac{1}{2}$? E’ possibile che Berta sia la giocatrice più forte (nel senso di avere maggiore probabilità di vincere una partita rispetto ad Antonio) e ciononostante Antonio abbia maggiore probabilità di vincere la gara?

Esercizio 26 Una fabbrica produce RAM che possono avere due tipi di difetti: il difetto A e il difetto B. Il responsabile per la qualità della fabbrica afferma, dall'esperienza passata, che la probabilità che una RAM abbia almeno uno dei due difetti è pari a 0,3; la probabilità che abbia il difetto A ma non il B è pari a 0,1; la probabilità che abbia contemporaneamente i due difetti è pari a 0,2. Calcolare la probabilità che una RAM abbia:

- a) il difetto A;
- b) il difetto B;
- c) il difetto A, dato che si è riscontrato che non abbia il difetto B.

Esercizio 27 Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l'altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell'incidente era giallo. Sappiamo che

- I taxi bianchi sono l'85% dei taxi in città.
 - La probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore dei taxi è 0,8.
- (a) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?
- (b) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell'identificazione corretta del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella dell'altro. Data questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

Esercizio 28 Tre urne contengono ognuna 10 palline. Due di esse contengono 5 palline rosse e 5 blu, la terza 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale delle tre urne sia quella con 3 palline rosse. Estraiamo 2 palline da ognuna delle tre urne, ottenendo il seguente risultato: da un'urna abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, da un'altra due palline rosse e dalla terza due palline blu. Qual è la probabilità che l'urna da cui abbiamo estratto due palline blu sia quella contenente tre palline rosse?