

Esercizi - Fascicolo IV

Esercizio 1 Una compagnia di assicurazioni emette una polizza che pagherà n euro se l'evento E si verificherà entro un anno. Se la compagnia stima che l'evento E si verificherà entro un anno con probabilità p , quanto dovrebbe essere il costo della polizza per il cliente in modo che il profitto atteso per la compagnia sia $n/10$?

Esercizio 2 Una persona lancia una moneta equilibrata finchè non ottiene croce la prima volta. Se appare croce all' n -mo lancio, la persona vince 2^n euro. Denotiamo con X il guadagno del giocatore. Mostrare che $E(X) = +\infty$.

Esercizio 3 Si estraggono 3 biglie, senza reinserimento, da un'urna contenente 5 biglie rosse, 4 biglie bianche e 2 biglie verdi. Sia X il numero di biglie rosse estratte e Y il numero di biglie bianche estratte.

- (a) Scrivere la densità (discreta) di (X, Y) .
- (b) Calcolare le densità marginali di X e Y e i valori attesi $E(X)$ ed $E(Y)$.
- (c) Calcolare la covarianza di X e Y .

Esercizio 4 Il piatto di una roulette contiene i numeri da 0 a 36. Consideriamo due possibili puntate: A) quella sui numeri pari: si vince se esce un numero pari tra 2 e 36, e in questo caso si riceve il doppio del capitale puntato (quindi si resta in attivo di una quantità uguale al capitale puntato); B) quella sulla prima dozzina: si vince se esce un numero tra 1 e 12, e in questo caso si riceve il triplo del capitale puntato (quindi si resta in attivo del doppio del capitale puntato).

Supponiamo di puntare contemporaneamente due Euro sui numeri pari, e un Euro sulla prima dozzina. Sia X il bilancio della giocata (capitale finale - capitale iniziale).

- a) Determinare la densità di X e $E(X)$.
- b) Si considerino le seguenti variabili casuali:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se esce un numero pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{se esce un numero della prima dozzina} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $Cov(Y, Z)$.

- c) Dopo aver espresso X come funzione di Y e Z , calcolare $E(X)$ e $Var(X)$ senza usare la densità calcolata in a).

Esercizio 5 Siano $X, Y \sim Be(p)$ indipendenti, con $p \in (0, 1)$. Mostrare che le variabili casuali $X + Y$ e $X - Y$ sono scorrelate ma non indipendenti.

Esercizio 6 In un canale di trasmissione vengono trasmessi simboli binari. I disturbi sul canale fanno sì che ogni simbolo trasmesso ha la probabilità del 2% di essere ricevuto errato, indipendentemente dagli altri simboli. I messaggi vengono trasmessi in "parole" composte da 50 simboli. Qual è la probabilità che una parola venga ricevuta con almeno due simboli errati? (Usare l'approssimazione di Poisson)

Esercizio 7 Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, tale che

$$P(X = k) = \frac{e^{-2} 2^k}{2k!} (1 + \lambda k),$$

con $\lambda > 0$.

- Determinare il valore di λ
- Sia $Y \sim Po(2)$. Mostrare che

$$P(X = k) = \frac{1}{2} [P(Y = k) + P(Y + 1 = k)].$$

- Usando il risultato in b., calcolare media e varianza di X

Esercizio 8 Sia $\lambda > 0$ e $c : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione tale che $c(0) = 0$ e $\inf_{n>0} c(n) > \lambda$. Sia X una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$ con densità

$$p_X(n) = \begin{cases} \frac{1}{Z} & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{Z} \frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\dots c(n)} & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$

dove $Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{c(1)c(2)\dots c(n)}$.

- Mostrare che $E(c(X)) = \lambda$.
- Mostrare che per ogni funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la v.c. $f(X + 1)$ ammette valor medio, si ha

$$E(c(X)f(X)) = \lambda E(f(X + 1)).$$

- * Si assuma che, per ogni $n \geq 0$, $|c(n + 1) - c(n)| \leq 1$. Sia $Y \sim Po(\lambda)$. Mostrare, per induzione su k , che per ogni $k \geq 1$

$$E[c(X)^k] \leq E(Y^k).$$

(Sugg.: usare, dopo averla verificata, l'uguaglianza $E(Y^{k+1}) = \lambda \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} E(Y^i)$)

Esercizio 9 a. Siano $X_1, X_2 \sim Po(\lambda)$ indipendenti. Fissati $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$, calcolare

$$(1) \quad P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n).$$

- Supponiamo che n sia fissato, e chiamiamo $q(k)$ il valore dell'espressione in (1). Mostrare che $q(\cdot)$ è il valore della densità di una variabile casuale binomiale, e determinarne i parametri.

- Siano ora $X_1, X_2, \dots, X_m \sim Po(\lambda)$ indipendenti, con $m > 2$. Calcolare

$$q_m(k) = P(X_1 = k | X_1 + X_2 + \dots + X_m = n),$$

e determinare i parametri della variabile casuale binomiale la cui densità è $q_m(\cdot)$.

Esercizio 10 Siano X, Z e W variabili casuali indipendenti con $X \sim Be(p)$, $Z, W \sim Po(\lambda)$. Definiamo

$$Y = XZ + W.$$

- Determinare le densità $p_{X,Y}$ e p_Y .
- Utilizzando la densità calcolata al punto a., determinare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
- Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$ *senza* utilizzare p_Y .

Esercizio 11 Siano X e Y due variabili casuali a valori in $\mathbb{N}$ aventi la seguente densità congiunta:

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$ sono due parametri fissati.

- Determinare le densità marginali di X e Y . Mostrare, in particolare, che $X \sim Po(p\lambda)$ e $Y \sim Po(\lambda)$.
- Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

Esercizio 12 Un'urna contiene 100 palline numerate da 0 a 99. Si estrae una pallina, e si denotano con X e Y le due cifre del numero estratto (la cifra delle decine, X , si considera uguale a zero per numeri minori di 10). Mostrare che X e Y sono indipendenti, e determinarne la distribuzione.

Esercizio 13 Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Gli eventi A e B sono indipendenti.
- Le variabili casuali 1_A e 1_B sono indipendenti.
- Le variabili casuali 1_A e 1_B sono scorrelate (cioè $Cov(1_A, 1_B) = 0$).

Esercizio 14 Siano $X \sim Ge(p)$ e $Y \sim Ge(q)$, Determinare la densità di $Z = \min(X, Y)$.

Esercizio 15 Siano $X, Y \sim Ge(p)$ indipendenti, $0 < p < 1$, e $Z := \max(X, Y)$.

- Determinare la densità congiunta di (X, Z) .
- Posto $W := Z - X$, determinare la densità p_W di W .
- Calcolare $E(W)$.
- È vero o falso che X e W sono indipendenti?

Esercizio 16 Siano $X, Y \sim Ge(p)$ indipendenti, e si definisca $Z := \max(X, Y) - Y$.

- Determinare la densità discreta di Z .
- Determinare $E(Z)$ (sugg.: ricordare che $E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geq n)$, oppure usare la funzione generatrice dei momenti)

Esercizio 17 Sia X una variabile casuale che assume i valori 0 e 1 e Y una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, la cui densità congiunta è determinata dalle identità: per $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = n) &= p \frac{e^{-1}}{n!} \\ P(X = 1, Y = n) &= (1-p) e^{-2} \frac{2^n}{n!}. \end{aligned}$$

- Determinare le densità marginali p_X e p_Y .
- Calcolare la probabilità condizionata $P(X = 0|Y > 0)$.
- Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
- Calcolare $Cov(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 18 Sia X una variabile casuale che assume i valori 0 e 1 e Y una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$, la cui densità congiunta è determinata dalle identità: per $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = n) &= \frac{p}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ P(X = 1, Y = n) &= \frac{1-p}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

- Determinare le densità marginali p_X e p_Y .
- Calcolare la probabilità condizionata $P(X = 0|Y > 0)$.
- Calcolare $E(Y)$ e $Var(Y)$.
- Calcolare $Cov(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 19 Sia $X_n \sim Po(n\lambda)$, e $Y_n = \frac{X_n - n\lambda}{n^{2/3}}$. Usando la Disuguaglianza di Chebyshev mostrare che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n| > \epsilon) = 0.$$

Esercizio 20 Siano $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, S\}$ variabili aleatorie indipendenti con le seguenti distribuzioni:

$$X_1 \sim X_2 \sim Po(\lambda), \quad Y_1 \sim Y_2 \sim Po(\mu), \quad S \sim Be\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ sono parametri fissati, con $\lambda \neq \mu$. Introduciamo le variabili Z_1, Z_2 definite da

$$Z_1 := X_1 \mathbf{1}_{\{S=0\}} + Y_1 \mathbf{1}_{\{S=1\}}, \quad Z_2 := X_2 \mathbf{1}_{\{S=0\}} + Y_2 \mathbf{1}_{\{S=1\}}.$$

In altre parole, lancio una moneta equilibrata (descritta dalla variabile S) e pongo $(Z_1, Z_2) := (X_1, X_2)$ se esce testa (cioè se $S = 0$) mentre pongo $(Z_1, Z_2) := (Y_1, Y_2)$ se esce croce ($S = 1$).

- Calcolare $E(Z_1)$ e $E(Z_2)$.
- Mostrare che Z_1 e Z_2 **non** sono indipendenti (sugg.: calcolare $E(Z_1 Z_2)$).

Esercizio 21 Ad un bambino vengono regalati N palloncini gonfiabili. Ognuno di questi palloncini rimane “integro”, cioè non scoppia, un numero di giorni la cui distribuzione è geometrica di parametro $p \in (0, 1)$. Si considerino indipendenti le durate dei diversi palloncini. Per $n = 1, 2, \dots$ denotiamo con X_n il numero di palloncini ancora integri dopo n giorni.

- Qual è la distribuzione di X_n ?
- Sia T la variabile casuale a valori naturali tale che l'ultimo palloncino scoppia dopo il $T + 1$ -mo giorno. Calcolate $P(T > n)$ per ogni $n \geq 0$, e la densità discreta p_T di T .
- Siano $1 \leq m \leq n$ e $0 \leq h \leq k \leq N$. Calcolare la probabilità condizionata

$$P(X_n = h | X_m = k).$$

- Per ogni fissato $n \geq 1$, calcolare

$$P(X_n = N | X_{2n} = 0).$$

Esercizio 22 Siano $X_1, \dots, X_n, T$ variabili casuali scalari indipendenti. Le variabili $X_1, \dots, X_n$ hanno la stessa distribuzione, con $E(X_i) = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, mentre la variabile T prende valori in $\{1, \dots, n\}$.

- a) Si spieghi perché, per $i, j \in \{1, \dots, n\}$, le variabili casuali X_i e $1_{\{T \geq j\}}$ sono indipendenti.

Si introduca la variabile S definita da

$$S := \sum_{i=1}^n X_i 1_{\{i \leq T\}}.$$

- b) Si mostri che $E(S) = \mu E(T)$.
- c) Si mostri che $\text{Cov}(S, X_j) = \sigma^2 P(T \geq j)$, per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.

Esercizio 23 Sia $X \sim B(n, p)$. Mostrare che

$$E \left[\frac{1}{X+1} \right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Esercizio 24 Sia $X \sim Po(\lambda)$. Quale valore k massimizza $P(X = k)$?

Esercizio 25 Sia $X \sim Po(\lambda)$. Mostrare che

$$E[X^n] = \lambda E[(X+1)^{n-1}].$$

Si utilizzi questo risultato per calcolare $E(X^3)$.

Esercizio 26 * Sia S un insieme di n elementi, $\Omega = \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$, e P la probabilità uniforme su Ω . Consideriamo la variabile casuale X definita da $X(\omega) = |\omega|$. Mostrare che

$$E(X) = \frac{n}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n2^{2n-2} - n(n+1)2^{n-2}}{(2^n - 1)^2}.$$

Si mostri inoltre che, per n grande, $\text{Var}(X) \sim n/4$.

Esercizio 27 Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili casuali i.i.d., la cui funzione generatrice dei momenti $\gamma(t)$ è finita per ogni $t \in R$, e sia N una variabile casuale a valori in $\{1, 2, \dots, n\}$, indipendente da $X_1, X_2, \dots, X_n$, la cui densità discreta indichiamo con $p_N(\cdot)$. Definiamo la variabile casuale S come segue

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

- a) Calcolare, in termini di $\gamma(t)$ e $\{p_N(j)\}_{1 \leq j \leq n}$, la funzione generatrice $\gamma_S(t)$ di S .
(Sugg: osservare che $e^{tS} = \sum_{j=1}^n e^{t(X_1 + \dots + X_j)} \mathbf{1}_{N=j}$.)
- b) Calcolare media e varianza di S in termini di media e varianza di X_1 e di N .

Esercizio 28 Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili casuali indipendenti, tali che $X_n \sim Be(1/2^n)$. Definiamo la variabile casuale T , a valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\} = \{1, 2, \dots, n, \dots, +\infty\}$:

$$T = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N} \text{ tali che } X_k = 1\} & \text{se } \{k \in \mathbb{N} \text{ tali che } X_k = 1\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Determinare un'espressione per $P(T > n)$. [Sugg.: si noti che l'evento $\{T > n\}$ può essere espresso in modo semplice in funzione delle prime n variabili $X_1, \dots, X_n$.]
- Scrivere $\log P(T > n)$ in forma di una somma $\sum_{k=1}^n a_k$, e mostrare che la serie $\sum_k a_k$ converge.
- Dedurre che $P(T = +\infty) > 0$.

Esercizio 29 Siano $X \sim Be(p)$, $Y \sim Po(\lambda)$ e $Z \sim Po(\mu)$ variabili casuali indipendenti. Definiamo

$$W := XY + (1 - X)Z.$$

- Senza fare calcoli con densità, calcolare media e varianza di W , e la covarianza $Cov(W, Y)$.
- Determinare la densità congiunta di (W, Y) , e la densità marginale di W .

Esercizio 30 Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$, la cui funzione di ripartizione F_X è data, per $n \in \mathbb{N}$, dalla formula

$$F_X(n) := 1 - \frac{1}{n+1}.$$

- Si determini la densità p_X di X , e si mostri che $X \notin L^1$.

Per $\alpha > 0$, diciamo che una variabile Y ha distribuzione $S(\alpha)$ ($Y \sim S(\alpha)$) se per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(x) := 1 - (1 - F_X(x))^\alpha.$$

- Siano $Y \sim S(\alpha)$ e $Z \sim S(\beta)$ variabili aleatorie indipendenti. Si determini la distribuzione di $W := \min(Y, Z)$.
- Determinare i valori di α tali che se $Y \sim S(\alpha)$ allora $Y \in L^1$. (Può essere utile ricordare che $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$)

Esercizio 31 Sia $(X_i)_{i \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione di Bernoulli di parametro $p \in (0, 1)$. Sia $q \in (p, 1)$.

- Utilizzando la disuguaglianza di Chebychev, si dimostri che per ogni $N \in \mathbb{N}$, ogni $t \geq 0$,

$$\mathbf{P} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \geq q \right) \leq e^{-tNq} (\mathbf{E} [e^{tX_1}])^N = \psi_N(t),$$

$$\text{ove } \psi_N(t) \doteq e^{-tNq} (e^t p + (1-p))^N.$$

- (b) Poniamo $h(q, p) \doteq q \log(q/p) + (1-q) \log((1-q)/(1-p))$. Utilizzando la differenziabilità di $\psi_N(\cdot)$, si calcoli il parametro $t = t_* \in [0, \infty)$ per il quale $\psi_N(t)$ sia minima. Si deduca che

$$\mathbf{P} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \geq q \right) \leq e^{-Nh(q,p)}.$$

Esercizio 32 In quanto segue, per $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$, sia $A_y := \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$.

- (a) Siano X e Y due variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}$, discrete e indipendenti. Si mostri che, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che $P(Y = y) > 0$, si ha

$$(2) \quad P((X, Y) \in A | \{Y = y\}) = P(X \in A_y).$$

- (b) Siano $W, Z \sim Po(1)$ indipendenti. Si ponga $Y := Z$, $X := W + Z$, $A := \{(0, 0)\}$, $y = 0$. Mostrare che l'identità (2) non vale, e si spieghi perché ciò non contraddice quanto visto al punto precedente.

Esercizio 33 Siano X e Y variabili aleatorie discrete, definite nello stesso spazio di probabilità. La funzione

$$\varphi_{X,Y}(x, z) := \begin{cases} P(X = x | X + Y = z) & \text{se } P(X + Y = z) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

viene detta *distribuzione di X condizionata a $X + Y$* .

- (a) Determinare $\varphi(x, y)$ nel caso in cui $X \sim B(n, p)$ e $Y \sim B(m, p)$ sono indipendenti. In particolare, mostrare che $\varphi(x, y)$ non dipende da p
- (b) Determinare $\varphi(x, y)$ nel caso in cui $X \sim Po(\lambda)$ e $Y \sim Po(\mu)$ sono indipendenti. In particolare, mostrare che $\varphi(x, y)$ dipende da λ e μ solo attraverso la quantità $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.
- (c) Siano X e Y due variabili aleatorie discrete indipendenti, con densità rispettivamente p_X e p_Y , e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ tale che

$$\sum_{x,y} f(x+y) p_X(x) p_Y(y) =: c \in (0, +\infty).$$

Siano inoltre X', Y' due variabili aleatorie discrete la cui densità congiunta sia data da

$$p_{X',Y'}(x, y) := \frac{1}{c} f(x+y) p_X(x) p_Y(y).$$

Mostrare che $\varphi_{X',Y'} = \varphi_{X,Y}$.