Esercizi - Fascicolo V

Esercizio 1 Sia X una v.c. uniformenente distribuita nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} 1_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x).$$

Posto $Y = \cos(X)$, trovare la distribuzione di Y.
Soluzione.

$$F_Y(y) = P(\cos(X) \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ P(\arccos(y) \leq |X| \leq \pi/2) & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{se } y > 1. \end{cases}$$

Tenendo conto che $P(\arccos(y) \leq |X| \leq \pi/2) = 2P(\arccos(y) \leq X \leq \pi/2) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(y)$ per $0 \leq y \leq 1$, derivando si trova

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} 1_{(0,1)}(y).$$

Esercizio 2 Si scelga a caso un punto X dell'intervallo $[0, 2]$, con distribuzione uniforme di densità

$$f_X(x) = \frac{1}{2} 1_{[0,2]}(x)$$

(in altre parole, X è una v.c. con densità f_X). Qual è la probabilità che il triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza X abbia area maggiore di 1?
Soluzione. Se A è l'area del triangolo, si ha

$$A = X^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Perciò

$$P(A > 1) = P(X > 2/3^{1/4}) = 1 - 3^{-1/4}.$$

Esercizio 3 * Si scelga a caso un angolo $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con distribuzione uniforme di densità

$$f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi} 1_{(0,\frac{\pi}{2})}(\theta),$$

e si consideri il punto del piano di coordinate $(\cos(\Theta), \sin(\Theta))$. Per tale punto si tracci la tangente alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, e sia L la lunghezza del segmento i cui estremi sono i punti d'intersezione di tale tangente con gli assi cartesiani. Determinare la distribuzione di L.

Soluzione. Si noti che $L = \tan(\Theta) + \frac{1}{\tan(\Theta)}$ (in particolare $L \geq 2$). Inoltre, posto $t = \tan(\Theta) > 0$, per $x \geq 2$

$$L \leq x \iff t^2 - xt + 1 \leq 0 \iff \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2} < t \leq \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} F_L(x) &= 1_{[2,+\infty)}(x) P\left[\Theta \in \left[\arctan\left(\frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}\right), \arctan\left(\frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right]\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right] 1_{[2,+\infty)}(x). \end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia $X \sim U(-1,1)$, e $Y = \frac{1}{1-X^2}$. Determinare la distribuzione di Y.
Soluzione. Notare che $F_Y(y) = 0$ se $y \leq 1$. Se $y > 1$

$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{1-X^2} \leq y\right).$$

Ma

$$\frac{1}{1-X^2} \leq y \iff 1 - X^2 \geq \frac{1}{y} \iff |X| \leq \sqrt{1 - \frac{1}{y}}.$$

Perciò

$$F_Y(y) = P\left(|X| \leq \sqrt{1-\frac{1}{y}}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{y}}.$$

Esercizio 5 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua, che ammette valor medio e tale che $P(X > 0) = 1$. Tramite un'opportuna integrazione per parti mostrare che

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)dt.$$

Soluzione. Notando che $P(X > t) = 1 - F_X(t)$, integrando per parti si trova che, per $x > 0$,

$$\int_0^x P(X > t)dt = xP(X > x) + \int_0^x t f_X(t)dt.$$

È dunque sufficiente dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} xP(X > x) = 0. \quad (\bullet)$$

Per far ciò, si noti che poiché X ammette valor medio

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t f_X(t)dt = 0.$$

Ma essendo $t \geq x$ per $t \in [x, +\infty)$, ne segue che

$$\int_x^{+\infty} t f_X(t)dt \geq x \int_x^{+\infty} f_X(t)dt = xP(X > x),$$

e quindi $(\bullet)$ segue.

Esercizio 6 Siano $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$ indipendenti, e

$$Y = \max(X_1, \dots, X_n), \quad Z = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Determinare la distribuzione di Y e Z.
Soluzione. Basta usare la Proposizione 3.26 delle dispense, e si trova $F_Y(x) = (1 - e^{-\lambda t})^n$, $Z \sim Exp(n\lambda)$.

Esercizio 7 Siano X e Y due variabili casuali scalari, assolutamente continue e indipendenti, con densità f_X e f_Y rispettivamente.

a. Mostrare che, posto $Z = X - Y$,

$$f_Z(z) = \int f_X(x+z) f_Y(x) dx.$$

b. Usando la formula nel punto a., determinare f_Z nel caso in cui $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1)$.
Soluzione. a. Posto $W = -Y$, passando per la funzione di ripartizione si ha che $f_W(x) = f_Y(-x)$ $\forall x$. Inoltre X e W sono indipendenti. Allora, per la formula di pag. 71,

$$f_{X-Y}(z) = f_{X+W}(z) = \int f_X(\xi) f_W(z-\xi) d\xi = \int f_X(\xi) f_Y(\xi - z) d\xi = \int f_X(x+z) f_Y(x) dx,$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il cambio di variabile $x = \xi - z$.

b.

$$f_Z(z) = \int e^{-(x+z)} 1_{[0,+\infty)}(x+z) e^{-x} 1_{[0,+\infty)}(x) dx = e^{-z} \int_{\max(0,-z)}^{+\infty} e^{-2x} dx$$

$$= e^{-z} \frac{1}{2} e^{-2\max(0,-z)} = \frac{1}{2} e^{-|z|},$$

dove abbiamo usato il fatto che $z + 2\max(0,-z) = |z|$.

Esercizio 8 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità f_X, e sia Y una variabile casuale scalare discreta di densità p_Y. Supponiamo che Y assuma solo un numero finito di valori, cioè l'insieme $\{x : p_Y(x) > 0\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ è finito, e che X e Y siano indipendenti.

a. Esprimere la funzione di ripartizione di $X + Y$ in termini di f_X e p_Y.

b. Mostrare che $X + Y$ è una variabile casuale assolutamente continua, e determinarne la densità in funzione di f_X e p_Y.
Soluzione. a. Sia $\{y_1, \dots, y_n\}$ l'insieme dei valori assunti da Y.

$$P(X + Y \leq t) = \sum_{k=1}^{n} P(X \leq t - x_k, Y = x_k) = \sum_k p_Y(x_k) \int_{-\infty}^{t-x_k} f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \sum_k f_X(x - x_k) p_Y(x_k) dx.$$

b. Dall'ultima espressione ottenuta segue immediatamente che

$$f_{X+Y}(x) = \sum_k f_X(x - x_k) p_Y(x_k)$$

Esercizio 9 * Sia X una variabile casuale la cui funzione di ripartizione è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ x/2 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Sia inoltre $Y \sim U(0,1)$ indipendente da X, e si definisca

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } X(\omega) < 1 \\ Y(\omega) & \text{se } X(\omega) = 1 \end{cases}$$

Determinare la distribuzione di Z (sugg: determinare la funzione di ripartizione di Z).
Soluzione. Sia $t \in [0,1)$.

$$P(Z \leq t) = P(X \leq t) + P(Y \leq t, X = 1) = \frac{t}{2} + P(Y \leq t)P(X = 1) = \frac{t}{2} + t\frac{1}{2} = t,$$

da cui si deduce che $Z \sim U(0,1)$.

Esercizio 10 Un congegno elettronico è costituito da n componenti collegate in serie: esso smette di funzionare non appena una qualsiasi delle sue componenti smette di funzionare. Siano $T_1, T_2, \ldots, T_n$ i tempi di vita delle n componenti, che si assumono indipendenti e identicamente distribuiti con distribuzione esponenziale di parametro 1. Sia X_n il tempo di vita dell'intero dispositivo.

a. Determinare la distribuzione di X_n.

b. Mostrare che, per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n > \epsilon) = 0$$

Soluzione. a. Essendo $X_n = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, basta usare l'esercizio 6.

b. Dal punto a. $P(X_n > \epsilon) = e^{-n\epsilon}$.

Esercizio 11 Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = -\log(x)1_{(0,1)}(x).$$

a. Determinare la funzione di ripartizione di X.

b. Sia $Y = -\log X$. Determinare la distribuzione di Y. In particolare, mostrare che Y è una variabile Gamma, e determinarne i parametri.

Soluzione. a. $F_X(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F_X(x) = 1$ per $x > 1$, e, per $0 < x \leq 1$:

$$F_X(x) = -\int_0^x \log(t)dt = x - x\log(x).$$

b. Si noti che $-\log X$ assume valori positivi. Allora, per $t \geq 0$:

$$P(Y \leq t) = P(X \geq e^{-t}) = 1 - F_X(e^{-t}) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Derivando rispetto a t si ottiene

$$f_Y(x) = xe^{-x}1_{(0,+\infty)}(x),$$

da cui $Y \sim \Gamma(2,1)$.

Esercizio 12 L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. Il tempo di attesa T_i, $i = 1, 2$ per parlare con l'operatore è, per entrambi i numeri, una variabile casuale esponenziale di media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che per primo risponderà.

a. Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?

b. Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Soluzione. a. Si noti che $T_i \sim Exp(1/15)$. Il tempo di attesa per la risposta è $T = \min(T_1, T_2) \sim Exp(2/15)$, da cui segue che $E(T) = 15/2$.

b.
$$P(T \leq 5) = 1 - e^{-\frac{2}{15}5} = 1 - e^{2/3}.$$

Esercizio 13 * Sia X una variabile casuale scalare, e sia F_X la sua funzione di ripartizione.

a. Supponendo che F_X sia invertibile (e perciò anche continua), determinare la distribuzione della variabile casuale $Y = F_X(X)$.

b*. Mostrare che il risultato al punto a. vale anche assumendo solo la continuità di F_X.

c. Mostrare, con un controesempio, che invece il risultato al punto a. può essere falso so F_X non è continua.

d. Mostrare che il risultato al punto a. è *sicuramente* falso se F_X è discontinua (pensare al supporto della distribuzione di Y).

Soluzione. a. Notare che $Y \in [0, 1]$, e quindi $F_Y(t) = 0$ per $t \leq 0$ e $F_Y(t) = 1$ per $t \geq 1$. Inoltre, per $t \in (0, 1)$:

$$F_Y(t) = P(F_X(X) \leq t) = P(X \leq F_X^{-1}(t)) = F_X(F_X^{-1}(t)) = t,$$

dove si è usato il fatto che F_X^{-1} è crescente. Ne segue che $Y \sim U(0, 1)$.

b. Poichè F_X è crescente e continua, l'antiimmagine $F_X^{-1}((-\infty, t])$, per $t \in (0, 1)$, è una semiretta inferiormente illimitata e chiusa, cioè

$$F_X^{-1}((-\infty, t]) = (-\infty, \xi_t],$$

dove ξ_t è il più grande valore di x per cui $F_Z(x) = t$. Ma allora

$$F_Y(t) = P(F_X(X) \leq t) = P(X \leq F_X^{-1}((-\infty, t]) = P(X \leq \xi_t) = F_X(\xi_t) = t,$$

che è lo stesso risultato trovato al punto a.

c. d. Sia $x \in \mathbb{R}$ un punto di discontinuità di F_X, cioè $F_X(x) > F_X(x^-)$. Allora, usando il fatto che F_X è crescente, si vede che $(F_X(x^-), F_X(x)) \not\subset F_X(\mathbb{R})$. In particolare $P(Y \in (F_X(x^-), F_X(x))) = 0$, mentre, se fosse $Y \sim U(0, 1)$, si avrebbe $P(Y \in (F_X(x^-), F_X(x))) = F_X(x) - F_X(x^-)$.

Esercizio 14 Siano $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1/2)$ variabili casuali indipendenti. Determinare la densità di $X + Y$.

Soluzione.

$$f_{X+Y}(z) = \int f_X(z - x) f_Y(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-(z-x)} e^{-x/2} dx 1_{[0,+\infty)}(z)$$

$$= 1_{[0,+\infty)}(z) \frac{1}{2} e^{-z} \int_0^z e^{x/2} dx = e^{-z}(e^{z/2} - 1) 1_{[0,+\infty)}(z).$$

Esercizio 15 * Sia X una variabile casuale scalare la cui funzione di ripartizione è

$$F(x) = e^{-e^{-x}}.$$

a. Determinare la distribuzione della variabile casuale $Y := e^{-X}$.

b. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili i.i.d. con distribuzione $Exp(1)$, e $M_n := \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Sia inoltre $\xi_n := M_n - \log(n)$, e si denoti con F_{ξ_n} la relativa funzione di ripartizione. Mostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\xi_n}(t) = F(t).$$

c. Sia $Z_n := \frac{M_n}{\log(n)}$, e F_{Z_n} la relativa funzione di ripartizione. Mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ e^{-1} & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e dedurre che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - 1\right| > \epsilon\right) = 0.$$

Soluzione.

a. Chiaramente $P(Y \leq y) = 0$ se $y \leq 0$. Per $y > 0$

$$P(Y \leq y) = P(X \geq -\log y) = 1 - F_X(-\log y) = 1 - e^{-y},$$

cioè $Y \sim Exp(1)$.

b.

$$\begin{aligned} F_{\xi_n}(t) &= P(M_n \leq t + \log n) = [P(X_1 \leq t + \log n)]^n \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-t-\log n})^n = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n & \text{se } t \geq -\log n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \end{aligned}$$

da cui segue facilmente la conclusione.

c. Per $t > 0$

$$F_{Z_n}(t) = P(M_n \leq t\log n) = \left(1 - \frac{1}{n^t}\right)^n.$$

Essendo

$$\log F_{Z_n}(t) = n \log\left(1 - \frac{1}{n^t}\right) = -n\left(\frac{1}{n^t} + o\left(\frac{1}{n^t}\right)\right)$$

si calcola facilmente $\lim_{n\to+\infty} F_{\xi_n}(t)$. Inoltre

$$P\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - 1\right| > \epsilon\right) = F_{Z_n}(1-\epsilon) + 1 - F_{Z_n}(1+\epsilon).$$

Passando al limite $n \to +\infty$ si conclude.

Esercizio 16 In questo esercizio la notazione $\lfloor x \rfloor$, per $x \in \mathbb{R}$, indica la *parte intera* del numero reale x. Sia $X \sim U(0,1)$, e definiamo: $X_1 := X$, $X_2 := 2X_1 - \lfloor 2X_1 \rfloor$, $Y_1 := \lfloor 2X_1 \rfloor$, $Y_2 := \lfloor 2X_2 \rfloor$.

a. Mostrare che $Y_1, Y_2 \sim Be(1/2)$ e che sono indipendenti.

b. Generalizzare l'argomento usato al punto a. mostrando che, se si definiscono induttivamente

$$X_{n+1} := 2X_n - \lfloor 2X_n \rfloor, \quad Y_n := \lfloor 2X_n \rfloor,$$

allora $(Y_n)_{n \geq 1}$ è una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione $Be(1/2)$.

Soluzione. a. Si tratta in sostanza di determinare i valori di X per cui le variabili Y_1 e Y_2 assumono il valore 1. Un esame diretto mostra che

$$Y_1 = 1 \iff X \in [1/2, 1) \qquad Y_2 = 1 \iff X \in [1/4, 1/2) \cup [3/4, 1).$$

Da ciò segue che, per ogni scelta di $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}$,

$$P(Y_1 = \sigma_1, Y_2 = \sigma_2) = 1/4,$$

da cui segue la conclusione desiderata.

b. Supponiamo di scrivere un numero $x \in (0,1)$ nella sua espansione binaria $x = 0.\sigma_1\sigma_2, \ldots$. Si vede facilmente che $\lfloor 2x \rfloor = \sigma_1$, e che $2x - \lfloor 2x \rfloor = 0.\sigma_2\sigma_3 \ldots$. Ne segue che $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sono le prime dell'espansione binaria di X. In particolare

$$\{Y_1 = \sigma_1, Y_2 = \sigma_2, \ldots, Y_n = \sigma_n\} = \left\{ X \in \left[\sum_{k=1}^{n} \sigma_k 2^{-k}, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k 2^{-k} + \frac{1}{2^n} \right) \right\},$$

e pertanto

$$P(Y_1 = \sigma_1, Y_2 = \sigma_2, \ldots, Y_n = \sigma_n) = \frac{1}{2^n},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio 17 Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili casuali indipendenti con distribuzione $Exp(1)$. Definiamo, per $t > 0$ fissato,

$$Y := \max\{n : X_1 + X_2 + \cdots X_n \leq t\}.$$

a. Spiegare l'identità

$$P(Y \geq n) = P(X_1 + X_2 + \cdots X_n \leq t).$$

b. Ricordando che $X_1 + X_2 + \cdots X_n \sim \Gamma(n, 1)$, tramite un'opportuna integrazione per parti mostrare che

$$P(X_1 + X_2 + \cdots X_n \leq t) = e^{-t}\frac{t^n}{n!} + P(X_1 + X_2 + \cdots X_n + X_{n+1} \leq t).$$

c. Dedurre che $Y \sim Po(t)$.

Soluzione.

a. Per definizione di Y, abbiamo che $X_1(\omega)+\cdots+X_{Y(\omega)}(\omega) \le t$. Pertanto, se $Y(\omega) \ge n$, allora

$$X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega) \le X_1(\omega)+\cdots+X_{Y(\omega)}(\omega) \le t.$$

Viceversa, se $X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega) \le t$, allora

$$n \le \max\{m : X_1(\omega)+X_2(\omega)+\cdots X_m(\omega) \le t\} = Y(\omega).$$

b.

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2+\cdots X_n \le t) &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{n!} x^n e^{-x}\Big|_0^t + \frac{1}{n!}\int_0^t x^n e^{-x} dx = e^{-t}\frac{t^n}{n!} + P(X_1+X_2+\cdots X_n + X_{n+1} \le t). \end{aligned}$$

c. Usando quanto mostrato in a. e b.

$$P(Y=n) = P(Y \ge n) - P(Y \ge n+1) = e^{-t}\frac{t^n}{n!}.$$

Esercizio 18 Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili casuali scalari i.i.d. con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,1)$, definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Introduciamo per $k \in \mathbb{N}$ l'evento A_k definiti da

$$A_k = \left\{X_k \le \frac{1}{3}\right\}$$

e introduciamo la variabile casuale $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ definita per $\omega \in \Omega$ da

$$T(\omega) := \inf\left\{k \ge 1 : \; X_k(\omega) \le \frac{1}{3}\right\}.$$

a) Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini degli eventi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

b) Si determini la densità discreta $p_T(n)$ di T, mostrando che $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_T(n) = 1$.

Introduciamo la variabile $Y := X_T$, cioè $Y(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$.

c)* Si determini la funzione di ripartizione $F_Y(x)$ di Y. (*Sugg.*: si calcoli innanzitutto $P(Y \le x, T = n)$ per $n \in \mathbb{N}$.)

Soluzione.

a) $\{T = n\} = A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$

b) $P(T = n) = P(A_1^c)^{n-1} \cdot P(A_1) = \frac{1}{3}\,(\frac{2}{3})^{n-1}$, cioè $T \sim \mathrm{Ge}(\frac{1}{3})$.

c) Si ha

$$P(Y \le x, T = n) = P(A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \cap \{X_n \le x\}).$$

Dato che $A_n \cap \{X_n \le x\} = \{X_n \le \min(x, \frac{1}{3})\}$, si ha

$$P(Y \le x, T = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot P\left(X_1 \le \min\left(x, \frac{1}{3}\right)\right),$$

da cui, sommando su $n \in \mathbb{N}$, si ottiene

$$P(Y \le x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(Y \le x, T = n) = 3\,P\left(X_1 \le \min\left(x, \frac{1}{3}\right)\right) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 3x & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}.$$

Dunque Y è distribuita uniformemente nell'intervallo $(0, \frac{1}{3})$.

Esercizio 19 * Siano $X, Y \sim Exp(1)$ indipendenti, e siano

$$W := X - Y, \qquad Z := X - \min(X, Y).$$

a) Calcolare la densità di W.

b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z.
(*Sugg.*: conviene calcolare $P(Z > z)$, per $z \in \mathbb{R}$. Può essere utile esprimere Z in funzione di W.)

c) Mostrare che Z non è né una variabile casuale discreta né una variabile casuale assolutamente continua.

Soluzione.

a) Possiamo scrivere $W = X + Y'$ dove abbiamo posto $Y' := -Y$. Si noti che $f_{Y'}(y) = e^y\,1_{(-\infty,0)}(y)$ e che X, Y' sono indipendenti. Applicando la formula di convoluzione si ha

$$f_W(w) = \int_{\mathbb{R}} f_X(w-t) f_{Y'}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-(w-t)} 1_{(0,\infty)}(w-t)\,e^t 1_{(-\infty,0)}(t)\,dt$$
$$= e^{-w}\int_{\mathbb{R}} e^{2t} 1_{(-\infty,w)}(t)\,1_{(-\infty,0)}(t)\,dt = e^{-w}\int_{-\infty}^{\min\{w,0\}} e^{2t}\,dt = e^{-w}\,\frac{e^{2\min\{w,0\}}}{2} = \frac{1}{2}\,e^{-|w|}.$$

b) Si noti che se $W \le 0$ (cioè $X \le Y$) si ha $Z = 0$, mentre se $W > 0$ (cioè $X > Y$) si ha $Z = X - Y = W$. In altre parole, vale la seguente relazione:

$$Z = W\,1_{\{W>0\}}.$$

Si noti che in ogni caso $Z \ge 0$, per cui $P(Z > z) = 0$ per $z < 0$. Per $z \ge 0$ si ha

$$P(Z > z) = P(W > z) = \int_z^\infty f_W(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_z^\infty e^{-w}\,dw = \frac{1}{2}\,e^{-z},$$

per cui

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-z} & z \ge 0 \end{cases}.$$

c) La variabile Z non è assolutamente continua perché $P(Z = 0) = F_Z(0) - F_Z(0^-) = \frac{1}{2} > 0$. Dato che $F_Z(z)$ è continua per $z \ne 0$, si ha che $P(Z = z) = F_Z(z) - F_Z(z^-) = 0$ per ogni $z \ne 0$, per cui

$$\sum_{z\in\mathbb{R}} P(Z = z) = P(Z = 0) = \frac{1}{2}.$$

Questo mostra che Z non può essere una variabile casuale discreta (in tal caso la somma dovrebbe fare uno).

Esercizio 20 Una variabile aleatoria reale X è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) \;:=\; \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Si mostri che $P(X > 1) = P(X < -1) = \frac{1}{4}$.

b) Si dimostri che $Y := 1/X$ è di Cauchy.

Soluzione.

a) La funzione di ripartizione di X vale

$$F_X(x) \;=\; P(X \le x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \frac{1}{\pi}\arctan(x) \,+\, \frac{1}{2}\,,$$

da cui $P(X < -1) = F_X(-1) = \frac{1}{4}$ e analogamente $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = \frac{1}{4}$.

b) Si ha che

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;&=\; P(Y \le y) \;=\; P(1/X \le y) \;=\; P(1/X \le y,\, X > 0) \,+\, P(1/X \le y,\, X < 0) \\ &=\; P(yX \ge 1,\, X > 0) \,+\, P(yX \le 1,\, X < 0)\,. \end{aligned}$$

Se $y > 0$ si ottiene dunque

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;&=\; P(X \ge 1/y,\, X > 0) \,+\, P(X \le 1/y,\, X < 0) \;=\; P(X \ge 1/y) \,+\, P(X < 0) \\ &=\; 1 \,-\, F_X(1/y) \,+\, F_X(0) \;=\; 1 \,-\, \frac{1}{\pi}\arctan(1/y)\,, \end{aligned}$$

mentre per $y < 0$

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;&=\; P(X \le 1/y,\, X > 0) \,+\, P(X \ge 1/y,\, X < 0) \;=\; P(X \in [1/y, 0)) \\ &=\; F_X(0) \,-\, F_X(1/y) \;=\; -\frac{1}{\pi}\arctan(1/y)\,. \end{aligned}$$

Derivando $F_Y(y)$ si ottiene dunque

$$f_Y(y) \;=\; F_Y'(y) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{1}{y^2}\frac{1}{1+(1/y)^2} \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\,,$$

cioè Y è di Cauchy.

Esercizio 21 Sia $X \sim U(0,1)$. Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo $g(x) := 4x(1-x)$ e definiamo $Y := g(X)$.

(a) Si determini la funzione di ripartizione di Y, si deduca che la variabile Y è assolutamente continua e se ne calcoli la densità.

(b) Si calcoli $Cov(X,Y)$.

Soluzione.

(a) Per $y \in \mathbb{R}$, la disequazione $4x(1-x) \le y$ ha come soluzioni $x \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})$ oppure $x \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})$ se $y \le 1$, mentre ha come soluzione tutta la retta reale se $y > 1$. Di conseguenza,

$$F_Y(y) \;=\; P(Y \le y) \;=\; \begin{cases} P\left(X \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})\right) \;+\; P\left(X \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})\right) & \text{se } y \le 1 \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$

Si noti che $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y}) > 1$ se $y < 0$, per cui in questo caso $P\left(X \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})\right) = 0$. Analogamente, per $y < 0$ si ha $P\left(X \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})\right) = 0$, poiché $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y}) < 0$. Di conseguenza $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$ e possiamo restringere[1] l'attenzione ai valori $y \in [0,1]$.

Dato che per $z \in [0,1]$ si ha $P(X \ge z) = 1 - z$ e $P(X \le z) = z$, si ottiene

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;&=\; P\left(X \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y})\right) \;+\; P\left(X \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y})\right) \\ &=\; 1 \;-\; \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-y}) \;+\; \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-y}) \;=\; 1-\sqrt{1-y}\,, \qquad \forall y \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$F_Y(y) \;=\; P(Y \le y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1-\sqrt{1-y} & \text{se } y \in [0,1] \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$

La funzione $F_Y(\cdot)$ è dunque C^1 a tratti, di conseguenza la variabile Y è assolutamente continua. La sua densità è data da

$$f_Y(y) \;=\; F_Y'(y) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\,.$$

(b) Per le proprietà del valor medio

$$E(XY) \;=\; E(X \cdot 4X(1-X)) \;=\; 4E(X^2) - 4E(X^3)\,,$$

$$E(X)E(Y) \;=\; E(X)E(4X(1-X)) \;=\; 4E(X)^2 - 4E(X)E(X^2)\,,$$

quindi

$$Cov(X,Y) \;=\; E(XY) - E(X)E(Y) \;=\; 4E(X^2)(1+E(X)) - 4(E(X^3)+E(X)^2)\,.$$

Dato che $E(X^n) = \int_0^2 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$, si ha $E(X) = \frac{1}{2}$, $E(X^2) = \frac{1}{3}$ e $E(X^3) = \frac{1}{4}$, da cui

$$Cov(X,Y) \;=\; \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) \;-\; 4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \;=\; 0\,.$$

[1] Questo si sarebbe potuto dedurre subito, considerando che la funzione g manda l'intervallo $[0,1]$ in $[0,1]$.

Esercizio 22 Sia X un punto aleatorio dell'intervallo $(0,1)$. Esso divide l'intervallo $(0,1)$ in due segmenti. Sia $Y \geq 1$ il rapporto tra il segmento più lungo e quello più corto.

(a) Supponiamo che $X \sim U(0,1)$. Si determinino la funzione di ripartizione e la densità di Y e si mostri che Y non ammette valor medio.

(b) Assumiamo ora che X sia una variabile casuale assolutamente continua, a valori in $(0,1)$, la cui densità f_X soddisfi la relazione:

$$f_X(x) + f_X(1-x) = 2\,, \qquad \text{per ogni } x \in (0,1)\,. \tag{1}$$

Si mostri che la distribuzione di Y è uguale a quella trovata al punto precedente. [*Sugg.*: si mostri che dalla relazione (1) segue che $F_X(z) - F_X(1-z) = 2z - 1$ per $z \in (0,1)$, dove F_X è la funzione di ripartizione di X.]

(c) Determinare una densità f_X, soddisfacente alla relazione (1), *diversa* dalla densità di una variabile casuale con distribuzione $U(0,1)$.

Soluzione.

(a) Sia $t \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P\left(\frac{X}{1-X} \leq t, X > \frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{1-X}{X} \leq t, X \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{t}{1+t}\right) + P\left(\frac{1}{1+t} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{t-1}{t+1}. \end{aligned}$$

Da ciò segue che Y ha densità $f_Y(y) = \frac{2}{(1+y)^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty)}(y)$. Dal fatto che

$$\int_1^{+\infty} y f_Y(y)dy = +\infty,$$

si deduce che Y non ammette valor medio.

(b) Se integriamo tra 0 e z la relazione (1), otteniamo

$$2z = \int_0^z [f_X(x) + f_X(1-x)]dx = F_X(z) + \int_{1-z}^1 f_X(x)dx = F_X(z) + 1 - F_X(1-z)\,,$$

ossia $F_X(z) - F_X(1-z) = 2z - 1$.

Ripetendo l'argomento al punto precedente si trova per $t \geq 1$

$$F_Y(t) = F_X\left(\frac{t}{1+t}\right) - F_X\left(\frac{1}{1+t}\right).$$

Dato che $t \geq 1$, si ha che $z_0 := \frac{t}{1+t} \geq \frac{1}{2}$ e inoltre $\frac{1}{1+t} = 1 - z_0$. Sostituendo nella precedente formula per F_Y:

$$F_Y(t) = F_X(z_0) - F_X(1-z_0) = 2z_0 - 1 = \frac{2t}{1+t} - 1 = \frac{t-1}{t+1}.$$

(c) Esempi: $X \sim U(0, 1/2)$ oppure X con densità $f(x) = 2x\, \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

Esercizio 23 Una variabile aleatoria reale X è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) \;:=\; c\, \frac{1}{1+x^2}\,,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è un'opportuna costante.

(a) Si determini il valore di c affinché f_X sia effettivamente una densità.

(b) Si calcoli $P(X > z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ e si mostri che per $z \to +\infty$

$$P(X > z) \;\sim\; \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} \qquad \left(\text{cioè} \quad P(X > z) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} \,+\, o\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

[*Sugg.*: può essere utile ricordare che $\arctan(z) + \arctan(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$, $\forall z \in \mathbb{R}$.]

(c) Sia ora $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. di variabili di Cauchy indipendenti e si definisca $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che per ogni $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n}{n} \le t\right) \;=\; \exp\left(-\frac{1}{\pi}\frac{1}{t}\right).$$

Soluzione.

(a) Imponendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 1$ e ricordando che una primitiva di $1/(1+x^2)$ è $\arctan(x)$, si ottiene $c(\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty)) = 1$, ovvero $c = 1/\pi$.

(b) Ricordando che $\arctan(t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} P(X > z) \;&=\; \frac{1}{\pi}\int_z^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\pi}\,[\arctan(x)]_z^{\infty} \;=\; \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(z)\right) \\ &=\; \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{z}\right) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} \,+\, o\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{per } z \to +\infty\,. \end{aligned}$$

(c) Per ogni $t > 0$ fissato si ha

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n}{n} \le t\right) \;&=\; F_{M_n}(nt) \;=\; \big(F_X(nt)\big)^n \;=\; \big(1 - P(X > nt)\big)^n \;=\; \left(1 - \frac{1}{\pi t}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &=\; \exp\left[n \log\left(1 - \frac{1}{\pi t}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \;=\; \exp\left[n\left(-\frac{1}{\pi t}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \;=\; \exp\left[-\frac{1}{\pi t} + o\,(1)\right]. \end{aligned}$$

Esercizio 24 Una scala lunga 10 metri viene appoggiata in modo aleatorio alla parete di un palazzo, in modo tale che se X è la distanza tra la base della scala e la base della parete, X è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \frac{\alpha+1}{10^{\alpha+1}}(10-x)^{\alpha}\mathbf{1}_{[0,10]}(x),$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro fissato.

(a) Calcolare la media $E(X)$ e la funzione di ripartizione F_X.

(b) Sia Y l'altezza rispetto al terreno del vertice della scala. Determinare la funzione di ripartizione F_Y e la densità f_Y.

(c) Per eseguire dei lavori di manutenzione sulla parete, è necessario che il vertice della scala abbia una distanza dal terreno compresa tra 6 e 8 metri. Qual è la probabilità che ciò accada?

Soluzione.

(a)

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\alpha+1}{10^{\alpha+1}} \int_0^{10} x(10-x)^\alpha dx \\ &= \frac{\alpha+1}{10^{\alpha+1}} \left[-\left.\frac{x(10-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^{10} + \frac{1}{\alpha+1}\int_0^{10} (10-x)^{\alpha+1} dx \right] = \frac{10}{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Chiaramente $F_X(x) = 0$ per $x < 0$ e $F_X(x) = 1$ per $x > 10$. Per $0 \leq x \leq 10$:

$$F_X(x) = \frac{\alpha+1}{10^{\alpha+1}} \int_0^{10} (10-t)^\alpha dt = -\left.\frac{(10-t)^{\alpha+1}}{10^{\alpha+1}}\right|_0^x = 1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^{\alpha+1}.$$

(b) Si noti che $Y^2 = 100 - X^2$. Perciò, per $y \in [0, 10]$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Y^2 \leq y^2) = P(X^2 \geq 100 - y^2) &= 1 - F_X\left(\sqrt{100-y^2}\right) \\ &= \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{10}\right)^2}\right)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Infine

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{\alpha+1}{10}\left(1 - \left(\frac{y}{10}\right)^2\right)^\alpha \frac{y}{\sqrt{100-y^2}} \mathbf{1}_{(0,10)}(y).$$

(c)

$$P(6 \leq Y \leq 8) = F_Y(8) - F_Y(6) = \frac{2^{\alpha+1}-1}{5^{\alpha+1}}.$$

Esercizio 25 Sia $\varphi : [0, +\infty) \to [0, 1)$ una funzione continua, crescente, tale che $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 1$, e il cui comportamento asintotico per $x \simeq 0$ è dato da

$$\varphi(x) = \alpha x^k + o(x^k),$$

dove $\alpha, k > 0$. Si consideri una successione $(X_n)_{n\geq1}$ di variabili casuali i.i.d., a valori in $[0, +\infty)$, e tali che, per ogni $t > 0$

$$P(X_i > t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right).$$

Si ponga, infine,

$$Y_n := \frac{\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{n^{1/k}}.$$

Mostrare che, per ogni $y > 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le y) = e^{-\frac{\alpha}{y^k}}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(Y_n \le y) = P(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le n^{1/k}y) &= \left[1 - \varphi\left(\frac{1}{n^{1/k}y}\right)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{ny^k} + o(1/n)\right]^n \quad \to e^{-\frac{\alpha}{y^k}} \end{aligned}$$

per $n \to +\infty$.

Esercizio 26 Sia X una variabile casuale assolutamente continua con densità $f_X(x) = 2x\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

(a) Determinare la distribuzione di $Y := -\log X$.

(b) Calcolare la probabilità che l'equazione

$$x^2 + 2Yx + 5Y^2 - 1 = 0$$

non ammetta soluzioni reali.

(c) Si definisca: $Z := \max(1, Y)$. Si calcoli la funzione di ripartizione di Z. La variabile casuale Z è assolutamente continua? È discreta?

Soluzione.

(a) Per $y \in (0, +\infty)$

$$F_Y(y) = P(X \ge e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^{1} 2x dx = 1 - e^{-2y},$$

da cui segue che $Y \sim Exp(2)$.

(b) Tale equazione non ammette soluzioni reali se e solo se

$$Y^2 - 5Y^2 + 1 = 1 - 4Y^2 < 0$$

cioè se $Y > 1/2$. Ciò avviene con probabilità

$$P(Y > 1/2) = 1 - F_Y(1/2) = e^{-1}.$$

(c) Calcoliamo la funzione di ripartizione di Z. Se $z \geq 1$

$$F_Z(z) = P(Y \leq z) = 1 - e^{-2z},$$

mentre $F_Z(z) = 0$ per $z < 1$. Il fatto che F_Z sia discontinua in $z = 1$ mostra che Z non può essere assolutamente continua. D'altra parte, essendo $z = 1$ l'unico punto di discontinuità, abbiamo $P(Z = 1) = e^{-2} < 1$ e $P(Z = z) = 0$ pe ogni $z \neq 1$. Questo mostra che Z non può avere una densità discreta, e dunque non è una variabile discreta.

Esercizio 27 Sia $\Theta \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, e sia X tale che l'angolo tra la retta passante per $(0, -1)$ e $(X, 0)$ (orientata da $(0, -1)$ a $(X, 0)$) e l'asse Oy (orientato verso la direzione positiva delle y) sia Θ.

(a) Mostrare che X è una variabile aleatoria assolutamente continua e determinarne la densità.

(b) Determinare il valore di $E(|X|)$.

Soluzione.

(a) Si noti che $X = \tan(\Theta)$. Pertanto

$$F_X(x) = P(\Theta \leq \arctan(x)) = \frac{1}{\pi}[\arctan(x) + \pi].$$

Essendo F_X di classe $\mathcal{C}^1$, X è assolutamente continua e ha densità

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

(b)

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1 + x^2)} dx = +\infty.$$