Esercizi - Fascicolo V

Esercizio 1 Sia X una v.c. uniformemente distribuita nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} 1_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(x).$$

Posto $Y = \cos(X)$, trovare la distribuzione di Y .

Esercizio 2 Si scelga a caso un punto X dell'intervallo $[0, 2]$, con distribuzione uniforme di densità

$$f_X(x) = \frac{1}{2} 1_{[0,2]}(x)$$

(in altre parole, X è una v.c. con densità f_X). Qual è la probabilità che il triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza X abbia area maggiore di 1?

Esercizio 3 * Si scelga a caso un angolo $\Theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ con distribuzione uniforme di densità

$$f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi} 1_{(0, \frac{\pi}{2})}(\theta),$$

e si consideri il punto del piano di coordinate $(\cos(\Theta), \sin(\Theta))$. Per tale punto si tracci la tangente alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, e sia L la lunghezza del segmento i cui estremi sono i punti d'intersezione di tale tangente con gli assi cartesiani. Determinare la distribuzione di L .

Esercizio 4 Sia $X \sim U(-1, 1)$, e $Y = \frac{1}{1-X^2}$. Determinare la distribuzione di Y .

Esercizio 5 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua, che ammette valor medio e tale che $P(X > 0) = 1$. Tramite un'opportuna integrazione per parti mostrare che

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt.$$

Esercizio 6 Siano $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ indipendenti, e

$$Y = \max(X_1, \dots, X_n), \quad Z = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Determinare la distribuzione di Y e Z .

Esercizio 7 Siano X e Y due variabili casuali scalari, assolutamente continue e indipendenti, con densità f_X e f_Y rispettivamente.

a. Mostrare che, posto $Z = X - Y$,

$$f_Z(z) = \int f_X(x+z) f_Y(x) dx.$$

b. Usando la formula nel punto a., determinare f_Z nel caso in cui $X \sim \text{Exp}(1)$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$.

Esercizio 8 * Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità f_X , e sia Y una variabile casuale scalare discreta di densità p_Y . Supponiamo che Y assuma solo un numero finito di valori, cioè l'insieme $\{x : p_Y(x) > 0\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ è finito, e che X e Y siano indipendenti.

a. Esprimere la funzione di ripartizione di $X + Y$ in termini di f_X e p_Y .

b. Mostrare che $X + Y$ è una variabile casuale assolutamente continua, e determinarne la densità in funzione di f_X e p_Y .

Esercizio 9 * Sia X una variabile casuale la cui funzione di ripartizione è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ x/2 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Sia inoltre $Y \sim U(0, 1)$ indipendente da X , e si definisca

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{se } X(\omega) < 1 \\ Y(\omega) & \text{se } X(\omega) = 1 \end{cases}$$

Determinare la distribuzione di Z (sugg: determinare la funzione di ripartizione di Z).

Esercizio 10 Un congegno elettronico è costituito da n componenti collegate in serie: esso smette di funzionare non appena una qualsiasi delle sue componenti smette di funzionare. Siano $T_1, T_2, \dots, T_n$ i tempi di vita delle n componenti, che si assumono indipendenti e identicamente distribuiti con distribuzione esponenziale di parametro 1. Sia X_n il tempo di vita dell'intero dispositivo.

a. Determinare la distribuzione di X_n .

b. Mostrare che, per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n > \epsilon) = 0$$

Esercizio 11 Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = -\log(x)1_{(0,1)}(x).$$

a. Determinare la funzione di ripartizione di X .

b. Sia $Y = -\log X$. Determinare la distribuzione di Y . In particolare, mostrare che Y è una variabile Gamma, e determinarne i parametri.

Esercizio 12 L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. Il tempo di attesa $T_i, i = 1, 2$ per parlare con l'operatore è, per entrambi i numeri, una variabile casuale esponenziale di media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che per primo risponderà.

a. Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?

b. Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Esercizio 13 * Sia X una variabile casuale scalare, e sia F_X la sua funzione di ripartizione.

a. Supponendo che F_X sia invertibile (e perciò anche continua), determinare la distribuzione della variabile casuale $Y = F_X(X)$.

b*. Mostrare che il risultato al punto a. vale anche assumendo solo la continuità di F_X .

c. Mostrare, con un controesempio, che invece il risultato al punto a. può essere falso se F_X non è continua.

d. Mostrare che il risultato al punto a. è *sicuramente* falso se F_X è discontinua (pensare al supporto della distribuzione di Y).

Esercizio 14 Siano $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1/2)$ variabili casuali indipendenti. Determinare la densità di $X + Y$.

Esercizio 15 * Sia X una variabile casuale scalare la cui funzione di ripartizione è

$$F(x) = e^{-e^{-x}}.$$

a. Determinare la distribuzione della variabile casuale $Y := e^{-X}$.

b. Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili i.i.d. con distribuzione $Exp(1)$, e $M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Sia inoltre $\xi_n := M_n - \log(n)$, e si denoti con F_{ξ_n} la relativa funzione di ripartizione. Mostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\xi_n}(t) = F(t).$$

c. Sia $Z_n := \frac{M_n}{\log(n)}$, e F_{Z_n} la relativa funzione di ripartizione. Mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ e^{-1} & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e dedurre che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - 1\right| > \epsilon\right) = 0.$$

Esercizio 16 In questo esercizio la notazione $\lfloor x \rfloor$, per $x \in \mathbb{R}$, indica la *parte intera* del numero reale x . Sia $X \sim U(0, 1)$, e definiamo: $X_1 := X$, $X_2 := 2X_1 - \lfloor 2X_1 \rfloor$, $Y_1 := \lfloor 2X_1 \rfloor$, $Y_2 := \lfloor 2X_2 \rfloor$.

a. Mostrare che $Y_1, Y_2 \sim Be(1/2)$ e che sono indipendenti.

b. Generalizzare l'argomento usato al punto a. mostrando che, se si definiscono induttivamente

$$X_{n+1} := 2X_n - \lfloor 2X_n \rfloor, \quad Y_n := \lfloor 2X_n \rfloor,$$

allora $(Y_n)_{n \geq 1}$ è una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione $Be(1/2)$.

Esercizio 17 Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili casuali indipendenti con distribuzione $Exp(1)$. Definiamo, per $t > 0$ fissato,

$$Y := \max\{n : X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t\}.$$

a. Spiegare l'identità

$$P(Y \geq n) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t).$$

b. Ricordando che $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, 1)$, tramite un'opportuna integrazione per parti mostrare che

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq t) = e^{-t} \frac{t^n}{n!} + P(X_1 + X_2 + \dots + X_n + X_{n+1} \leq t).$$

c. Dedurre che $Y \sim Po(t)$.

Esercizio 18 Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili casuali scalari i.i.d. con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, 1)$, definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Introduciamo per $k \in \mathbb{N}$ l'evento A_k definiti da

$$A_k = \left\{ X_k \leq \frac{1}{3} \right\}$$

e introduciamo la variabile casuale $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ definita per $\omega \in \Omega$ da

$$T(\omega) := \inf \left\{ k \geq 1 : X_k(\omega) \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

a) Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini degli eventi $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

b) Si determini la densità discreta $p_T(n)$ di T , mostrando che $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_T(n) = 1$.

Introduciamo la variabile $Y := X_T$, cioè $Y(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$.

c)* Si determini la funzione di ripartizione $F_Y(x)$ di Y . (*Sugg.*: si calcoli innanzitutto $P(Y \leq x, T = n)$ per $n \in \mathbb{N}$.)

Esercizio 19 * Siano $X, Y \sim Exp(1)$ indipendenti, e siano

$$W := X - Y, \quad Z := X - \min(X, Y).$$

a) Calcolare la densità di W .

b) Calcolare la funzione di ripartizione di Z .

(*Sugg.*: conviene calcolare $P(Z > z)$, per $z \in \mathbb{R}$. Può essere utile esprimere Z in funzione di W .)

c) Mostrare che Z non è né una variabile casuale discreta né una variabile casuale assolutamente continua.

Esercizio 20 Una variabile aleatoria reale X è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Si mostri che $P(X > 1) = P(X < -1) = \frac{1}{4}$.

b) Si dimostri che $Y := 1/X$ è di Cauchy.

Esercizio 21 Sia $X \sim U(0, 1)$. Per $x \in \mathbb{R}$ poniamo $g(x) := 4x(1-x)$ e definiamo $Y := g(X)$.

- (a) Si determini la funzione di ripartizione di Y , si deduca che la variabile Y è assolutamente continua e se ne calcoli la densità.
- (b) Si calcoli $Cov(X, Y)$.

Esercizio 22 Sia X un punto aleatorio dell'intervallo $(0, 1)$. Esso divide l'intervallo $(0, 1)$ in due segmenti. Sia $Y \geq 1$ il rapporto tra il segmento più lungo e quello più corto.

- (a) Supponiamo che $X \sim U(0, 1)$. Si determinino la funzione di ripartizione e la densità di Y e si mostri che Y non ammette valor medio.
- (b) Assumiamo ora che X sia una variabile casuale assolutamente continua, a valori in $(0, 1)$, la cui densità f_X soddisfi la relazione:

$$(1) \quad f_X(x) + f_X(1-x) = 2, \quad \text{per ogni } x \in (0, 1).$$

Si mostri che la distribuzione di Y è uguale a quella trovata al punto precedente.

[Sugg.: si mostri che dalla relazione (1) segue che $F_X(z) - F_X(1-z) = 2z - 1$ per $z \in (0, 1)$, dove F_X è la funzione di ripartizione di X .]

- (c) Determinare una densità f_X , soddisfacente alla relazione (1), *diversa* dalla densità di una variabile casuale con distribuzione $U(0, 1)$.

Esercizio 23 Una variabile aleatoria reale X è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := c \frac{1}{1+x^2},$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è un'opportuna costante.

- (a) Si determini il valore di c affinché f_X sia effettivamente una densità.
- (b) Si calcoli $P(X > z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ e si mostri che per $z \rightarrow +\infty$

$$P(X > z) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{z} \quad \left(\text{cioè } P(X > z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \right).$$

[Sugg.: può essere utile ricordare che $\arctan(z) + \arctan(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$, $\forall z \in \mathbb{R}$.]

- (c) Sia ora $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione i.i.d. di variabili di Cauchy indipendenti e si definisca $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che per ogni $t > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n}{n} \leq t\right) = \exp\left(-\frac{1}{\pi} \frac{1}{t}\right).$$

Esercizio 24 Una scala lunga 10 metri viene appoggiata in modo aleatorio alla parete di un palazzo, in modo tale che se X è la distanza tra la base della scala e la base della parete, X è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \frac{\alpha + 1}{10^{\alpha+1}} (10 - x)^\alpha \mathbf{1}_{[0,10]}(x),$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro fissato.

- (a) Calcolare la media $E(X)$ e la funzione di ripartizione F_X .
- (b) Sia Y l'altezza rispetto al terreno del vertice della scala. Determinare la funzione di ripartizione F_Y e la densità f_Y .
- (c) Per eseguire dei lavori di manutenzione sulla parete, è necessario che il vertice della scala abbia una distanza dal terreno compresa tra 6 e 8 metri. Qual è la probabilità che ciò accada?

Esercizio 25 Sia $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ una funzione continua, crescente, tale che $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1$, e il cui comportamento asintotico per $x \simeq 0$ è dato da

$$\varphi(x) = \alpha x^k + o(x^k),$$

dove $\alpha, k > 0$. Si consideri una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di variabili casuali i.i.d., a valori in $[0, +\infty)$, e tali che, per ogni $t > 0$

$$P(X_i > t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right).$$

Si ponga, infine,

$$Y_n := \frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n)}{n^{1/k}}.$$

Mostrare che, per ogni $y > 0$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq y) = e^{-\frac{\alpha}{y^k}}.$$

Esercizio 26 Sia X una variabile casuale assolutamente continua con densità $f_X(x) = 2x \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

- (a) Determinare la distribuzione di $Y := -\log X$.
- (b) Calcolare la probabilità che l'equazione

$$x^2 + 2Yx + 5Y^2 - 1 = 0$$

non ammetta soluzioni reali.

- (c) Si definisca: $Z := \max(1, Y)$. Si calcoli la funzione di ripartizione di Z . La variabile casuale Z è assolutamente continua? È discreta?

Esercizio 27 Sia $\Theta \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, e sia X tale che l'angolo tra la retta passante per $(0, -1)$ e $(X, 0)$ (orientata da $(0, -1)$ a $(X, 0)$) e l'asse Oy (orientato verso la direzione positiva delle y) sia Θ .

- (a) Mostrare che X è una variabile aleatoria assolutamente continua e determinarne la densità.
- (b) Determinare il valore di $E(|X|)$.