Esercizi - Fascicolo VI

Esercizio 1 Vengono generati n numeri casuali tra 0 e 1, con distribuzione uniforme. Quanti numeri è necessario generare affinché la probabilità che la somma di essi sia compresa tra $0.49n$ e $0.51n$ sia maggiore o uguale a 0.99?
Soluzione. La probabilità in esame si può riscrivere nella forma

$$P(0.49 \leq \overline{X}_n \leq 0.51) = P\left(-\frac{0.01}{\sqrt{1/12}}\sqrt{n} \leq Z_n \leq \frac{0.01}{\sqrt{1/12}}\sqrt{n}\right) \simeq 2\Phi(0.01\sqrt{12n}) - 1.$$

Dobbiamo allora risolvere:

$$\simeq 2\Phi(0.01\sqrt{12n}) - 1 \geq 0.99$$

cioè

$$\Phi(0.01\sqrt{12n}) \geq 0.995 \;\Leftrightarrow\; 0.01\sqrt{12n} \geq \Phi^{-1}(0.995) \simeq 2.58,$$

da cui si trova $n \geq 5547$.

Esercizio 2 Un venditore porta a porta deve vendere 10 copie di un libro. Se ogni singolo cliente acquista il libro con probabilità 0.1, quanti clienti deve visitare il venditore affinché la probabilità di vendere tutti e dieci i libri sia almeno 0.99?
Soluzione. Poste $X_1, \ldots, X_n \sim Be(0,1)$ indipendenti, la probabilità in esame si può riscrivere nella forma

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 10\right) = P\left(\overline{X}_n \geq \frac{10}{n}\right) = P\left(Z_n \geq \frac{\frac{10}{n} - 0.1}{\sqrt{0.1 \cdot 0.9}}\sqrt{n}\right)$$

$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\frac{10}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{10}}{0.3}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3}\right).$$

Dobbiamo allora risolvere

$$\Phi\left(\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3}\right) \geq 0.99$$

ossia

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{10}{\sqrt{n}}}{0.3} \geq 2.33$$

che si può riscrivere nella forma

$$n - 6.99\sqrt{n} - 100 \geq 0,$$

da cui $\sqrt{n} \geq 14.08$, ovvero $n \geq 199$.

Esercizio 3 Calcolare approssimativamente la probabilità che una variabile casuale X con distribuzione di Poisson di parametro 100 assuma un valore minore di 95.
Soluzione. Bisogna ricordare che se $X_1, \ldots, X_{100} \sim Po(1)$ sono indipendenti, allora $X_1 + \ldots + X_n \sim Po(100)$. Ricordando che $E(X_i) = Var(X_i) = 1$, la probabilità da calcolare è

$$P\left(\overline{X}_{100} \leq 0.95\right) = P(Z_{100} \leq -0.05 \cdot 10) \simeq \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 0.30854.$$

Esercizio 4 Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim Exp(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale calcolare:

a. se $n = 100$ la probabilità $P(T < 90)$;

b. il valore minimo di n per cui $P(T < 90) \leq 0.05$.

Soluzione. a.

$$P(\overline{T}_{100} < 0.9) = P(Z_{100} \leq -0.1 \cdot 10) \simeq \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.15866.$$

b.

$$P\left(\overline{T}_n < \frac{90}{n}\right) = P\left(Z_n < \left(\frac{90}{n} - 1\right)\sqrt{n}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right).$$

Vogliamo allora che sia

$$\Phi\left(\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95,$$

da cui

$$\sqrt{n} - \frac{90}{\sqrt{n}} \geq 1.64,$$

che si riscrive nella forma

$$n - 1.64\sqrt{n} - 90 \geq 0 \;\Rightarrow\; n \geq 107.$$

Esercizio 5 Un giocatore di pallacanestro ha una percentuale di successo nei tiri da tre punti del 20%. Calcolare:

a. la probabilità che in 100 tiri faccia non più di 54 punti;

b. il numero minimo di tiri che deve effettuare per realizzare almeno 57 punti con probabilità maggiore o uguale a 0.95.

Soluzione. a. Sia X_i la variabile di Bernoulli che vale 1 se l'i-esimo canestro viene realizzato. Poichè realizzare non più di 54 punti significa realizzare non più di 18 canestri, le probabilità da calcolare è

$$P\left(\overline{X}_{100} \leq \frac{18}{100}\right) = P\left(Z_{100} \leq \frac{-0.02}{\sqrt{0.2 \cdot 0.8}} 10\right) \simeq \Phi(-1) = 0.30854.$$

b. Poichè realizzare almeno 57 punti significa realizzare almeno 19 canestri, si vuole che sia

$$P\left(\overline{X}_n \geq \frac{19}{n}\right) = P\left(Z_n \geq \frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4}\sqrt{n}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4}\sqrt{n}\right) \geq 0.95,$$

cioè

$$\frac{\frac{19}{n} - 0.2}{0.4}\sqrt{n} \geq 1.64 \;\Leftrightarrow\; 0.2 \cdot n - 0.784\sqrt{n} - 19 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; n \geq 142.$$

Esercizio 6 Il numero giornaliero di passeggeri sui treni da Milano a Firenze è una variabile aleatoria di distribuzione incognita. Supponendo che il valore atteso sia pari a 3000 e la varianza pari a 10^6, si calcoli approssimativamente la probabilità che in 30 giorni il numero complessivo di viaggiatori sia almeno 10^5.

Soluzione. Sia X_i il numero di passeggeri de giorno i-mo.

$$P(X_1 + \cdots + X_{30} > 10^5) = P(\bar{X}_{30} > \frac{10^5}{30}$$

$$= P(\frac{\bar{X}_{30} - 3000}{1000}\sqrt{30} > \frac{333}{1000}\sqrt{30}) \simeq 1 - \Phi(1.825) \simeq 0.034.$$

Esercizio 7 Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione di Poisson di parametro 1. Usando opportunamente il Teorema del Limite Centrale per tale successione, calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!}.$$

Soluzione. Notare che $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim Po(n)$. Ma allora

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = P(S_n \leq n + \sqrt{n}) = P\left(\frac{\overline{X}_n - 1}{1}\sqrt{n} \leq 1\right).$$

Per il Teorema del limite centrale, la successione $\frac{\overline{X}_n - 1}{1}\sqrt{n}$ converge in distribuzione ad una Normale standard. Perciò

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = \Phi(1).$$

Esercizio 8 Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30.000 firme, quante persone è necessario interpellare affinchè la soglia delle 30.000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno $0,95$?

Soluzione. Sia X_i la variabile che vale 1 se l'i-esima persona interpellata accetta di firmare, e 0 altrimenti. Per ipotesi $X_i \sim Be(0.6)$, e le X_i si possono ritenere indipendenti. La probabilità in esame è, allora, usando l'approssimazione normale,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 30000\right) = P\left(\frac{\overline{X}_n - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n} \geq \frac{\frac{30000}{n} - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n}\right)$$

$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{\frac{30000}{n} - 0.6}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(0.6 - \frac{\frac{30000}{n}}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n}\right).$$

Richiedendo che tale probabilità sia maggiore o uguale a 0.95, si ottiene:

$$0.6 - \frac{\frac{30000}{n}}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4}}\sqrt{n} \geq \Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.64$$

che equivale a

$$0.6n - 0.8\sqrt{n} - 30000 \geq 0$$

da cui

$$n \geq 50300.$$

Esercizio 9 Per una certa specie africana di uccelli, i neonati hanno – indipendentemente l'uno dal l'altro – una probabilità di sopravvivere al primo mese pari a $1/7$. Quelli che sopravvivono al primo mese hanno una probabilità pari a $1/3$ di superare l'anno.

(a) Qual è la probabilità che un neonato sopravviva al primo anno?

(b) Se un neonato muore entro il primo anno, qual è la probabilità che sia sopravvissuto al primo mese?

(c) Si determini approssimativamente il numero minimo n di neonati da monitorare affinché la probabilità che ne sopravvivano almeno 30 dopo un mese sia almeno 0.95.

Soluzione.

(a) Introducendo gli eventi $A :=$ "il neonato sopravvive al primo mese" e $B :=$ "il neonato sopravvive al primo anno", i dati del problema ci dicono che

$$P(A) \;=\; \frac{1}{7}, \qquad P(B|A) \;=\; \frac{1}{3}.$$

Di conseguenza, per il teorema delle probabilità totali,

$$P(B) \;=\; P(B|A)P(A) \;+\; P(B|A^c)P(A^c) \;=\; P(B|A)P(A) \;=\; \frac{1}{3}\frac{1}{7} \;=\; \frac{1}{21},$$

dove si è usato il fatto che $P(B|A^c) = 0$, perché $B \subseteq A$.

(b) Per la formula di Bayes

$$P(A|B^c) \;=\; \frac{P(B^c|A)P(A)}{P(B^c)} \;=\; \frac{(1-\frac{1}{3})\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{21}} \;=\; \frac{1}{10}.$$

(c) Dati n neonati, il numero di questi che sopravvive dopo un mese è una variabile casuale X con distribuzione $B(n,p)$, con $p = \frac{1}{7}$. Applicando l'approssimazione normale e la correzione di continuità, si ottiene

$$P(X \geq 30) \;=\; P(X \geq 29.5) \;=\; P\left(\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \geq \frac{\frac{29.5}{n} - \frac{1}{7}}{\sqrt{\frac{1}{7}(1-\frac{1}{7})}}\sqrt{n}\right) \;\simeq\; \Phi\left(\frac{\frac{1}{7} - \frac{29.5}{n}}{\sqrt{6}/7}\sqrt{n}\right).$$

Dato che $\Phi(z) \geq 0.95$ se e solo se $z \geq \Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.64$, si ottiene la disequazione

$$\frac{\frac{1}{7} - \frac{29.5}{n}}{\sqrt{6}/7}\sqrt{n} \;\geq\; 1.64 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 - 1.64\sqrt{6}\sqrt{n} - 29.5 \cdot 7 \;\geq\; 0.$$

Le soluzioni positive sono date da $\sqrt{n} \geq 16.52$, cioè $n \geq 273$.

Esercizio 10 In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B. Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantisce che essi votino per il candidato A. Tutti gli altri elettori votano "a caso", scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

(a) Supponiamo che l'organizzazione malavitosa controlli $n = 2\,000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?

(b) Qual è il numero minimo n di individui che l'organizzazione malavitosa deve controllare, per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?

Soluzione.

(a) Sia X il numero di voti ricevuti da A tra i $998\,000$ elettori non controllati. Notare che $X \sim B(998\,000, 1/2)$. Il candidato A vince se $X > 498\,000$. Usando l'approssimazione normale (dati i numeri elevati la correzione di continuità non è rilevante)

$$P(X > 498\,000) = P\left(\frac{X - 499\,000}{\frac{1}{2}\sqrt{998\,000}} > -\frac{1\,000}{\frac{1}{2}\sqrt{998\,000}}\right) \simeq \Phi(2) = 0.977.$$

(b) Se X è il numero di voti ricevuti da A tra i $1\,000\,000 - n$ elettori non controllati, si ha $X \sim B(1\,000\,000 - n, 1/2)$. Il candidato A vince se $X > 500000 - n$, per cui procedendo come sopra

$$P(X > 500\,000 - n) = P\left(\frac{X - \frac{1\,000\,000-n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000 - n}} > -\frac{n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000 - n}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000 - n}}\right).$$

Quindi deve essere $\frac{n}{\sqrt{1\,000\,000-n}} > \Phi^{-1}(0.99) \simeq 2.33$. Elevando al quadrato e risolvendo, si trova $n \geq 2333$.

Esercizio 11 Siano C, X, Y variabili aleatorie reali indipendenti, con $X \sim Po(4)$, $Y \sim Po(4)$ mentre $C \sim Be(p)$, dove $p \in (0, 1)$ è un parametro fissato. Definiamo la variabile

$$W \;:=\; CX \,+\, (1 - C)Y\,.$$

(a) Si mostri che $E(W) = 4$ e $Var(W) = 4$.

(b) Siano $W_1, W_2, \ldots, W_{100}$ variabili i.i.d. con la stessa legge di W. Si determini approssimativamente il valore di c tale che la somma $W_1 + \ldots + W_{100}$ assuma valori maggiori di c con probabilità 0.98.

(c) Si dimostri che $W \sim Po(4)$.
[*Sugg.*: calcolare la densità discreta di W condizionando rispetto agli eventi $\{C = 0\}$ e $\{C = 1\}$]

Soluzione.

(a) Per le proprietà ben note del valor medio si ha

$$E(W) = E(C)E(X) + (1 - E(C))E(Y) = p4 + (1-p)4 = 4\,.$$

Si noti che

$$W^2 = C^2X^2 + (1-C)^2Y^2 + 2C(1-C)XY = CX^2 + (1-C)Y^2\,,$$

poiché $C = C^2$, $(1-C) = (1-C)^2$ e $C(1-C) = 0$, essendo C a valori in $\{0,1\}$. Dato che $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 4 + 16 = 20$ e analogamente $E(Y^2) = 20$, si ottiene

$$E(W^2) = E(C)E(X^2) + (1 - E(C))E(Y^2) = p20 + (1-p)20 = 20\,,$$

da cui $Var(W) = E(W^2) - E(W)^2 = 20 - 16 = 4$.

(b) Indicando $\mu = 4$, $\sigma = 2$ si ottiene

$$\begin{aligned} P(W_1 + \ldots + W_{100} > c) &= P\left(\overline{W}_{100} > \frac{c}{100}\right) = P\left(\frac{\overline{W}_{100} - \mu}{\sigma}\sqrt{100} > \frac{\frac{c}{100} - 4}{2}10\right) \\ &\simeq P\left(Z > \frac{c}{20} - 20\right) = \Phi\left(20 - \frac{c}{20}\right)\,. \end{aligned}$$

Dato che $\Phi^{-1}(0.98) \simeq 2.05$, si ottiene l'equazione

$$20 - \frac{c}{20} = 2.05 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 359.$$

(c) Condizionando rispetto agli eventi $\{C = 1\}$ e $\{C = 0\}$ e usando la formula delle probabilità totali, per $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ si ottiene

$$\begin{aligned} P(W = k) &= P(W = k|C = 0)P(C = 0) + P(W = k|C = 1)P(C = 1) \\ &= P(Y = k|C = 0)(1-p) + P(X = k|C = 1)p \;=\; P(Y = k)(1-p) + P(X = k)p\,, \end{aligned}$$

e dato che $P(X = k) = P(Y = k) = e^{-4}4^k/k!$ si ottiene $P(W = k) = e^{-4}4^k/k!$, quindi $W \sim Po(4)$.

Esercizio 12 Sia $(X_n)_{n=1}^N$ una famiglia di variabili casuali i.i.d., tali che $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Sia inoltre ξ una variabile casuale con la stessa distribuzione delle X_n e indipendente da tutte le X_n. Poniamo $Y_n := \xi X_n$.

(a) Mostrare che le variabili casuali $(Y_n)_{n=1}^N$ sono i.i.d.

(b) Mostrare che le variabili casuali bidimensionali $(X_n, Y_n)_{n=1}^N$ sono identicamente distribuite ma non indipendenti.

Soluzione.

(a) La tesi segue se mostriamo che $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ hanno la stessa distribuzione. Anzitutto, se $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, 1\}^n$, è chiaro che

$$P(X_1 = \sigma_1, \ldots, X_n = \sigma_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Usando l'indipendenza tra $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e ξ, abbiamo

$$\begin{aligned}
&P(Y_1 = \sigma_1, \ldots, Y_n = \sigma_n) \\
&\quad = P(X_1 = \sigma_1, \ldots, X_n = \sigma_n, \xi = 1) + P(X_1 = -\sigma_1, \ldots, X_n = -\sigma_n, \xi = -1) \\
&\quad = P(X_1 = \sigma_1, \ldots, X_n = \sigma_n) P(\xi = 1) + P(X_1 = -\sigma_1, \ldots, X_n = -\sigma_n) P(\xi = -1) \\
&\quad = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

(b) Si noti che

$$P(X_n = 1, Y_n = 1) = P(X_n = 1, \xi = 1) = \frac{1}{4} = P(X_n = 1, \xi = -1) = P(X_n = 1, Y_n = -1).$$

Allo stesso modo si mostra che

$$P(X_n = -1, Y_n = 1) = P(X_n = -1, Y_n = -1) = \frac{1}{4},$$

e quindi la distribuzione di (X_n, Y_n) non dipende da n.

Se le coppie (X_n, Y_n) fossero indipendenti, anche i prodotti $X_n Y_n$ sarebbero indipendenti (in quanto funzioni di variabili casuali indipendenti sono indipendenti). Ma, osservando che $X_n Y_n = \xi$ per ogni n,

$$P(X_1 Y_1 = 1, X_2 Y_2 = 1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2} \neq P(X_1 Y_1 = 1) P(X_2 Y_2 = 1) = P(\xi = 1)^2 = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 13 La lunghezza dei chiodini prodotti da una certa ditta ha una distribuzione incognita, la cui media e varianza indichiamo con μ e σ^2. Il valore di σ^2 è noto e pari a $0.25\,\mathrm{mm}^2$, mentre il valore di μ (espresso in mm) è incognito e vogliamo stimarlo empiricamente.

A tal fine, misuriamo le lunghezze $X_1, \ldots, X_n$ di n chiodini scelti a caso e ne indichiamo la media empirica con $\overline{X}_n := (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Se n è grande, per la legge dei grandi numeri sappiamo che $\overline{X}_n$ sarà vicino a μ. Per rendere più quantitativa questa affermazione, scegliamo un numero reale $\delta > 0$ e consideriamo l'intervallo I_δ di ampiezza δ centrato in $\overline{X}_n$, vale a dire

$$I_\delta := \big(\overline{X}_n - \delta\,,\, \overline{X}_n + \delta\big)\,.$$

- Si determini δ_n in modo che la probabilità che l'intervallo I_{δ_n} contenga μ valga approssimativamente 0.95 per n grande.

  [*Sugg.*: si esprima l'evento $\{\mu \in I_{\delta_n}\}$ nella forma $\{a < \overline{X}_n < b\}$ per opportuni a, b.]

Soluzione.

Per definizione $\mu \in I_{\delta_n}$ significa $\overline{X}_n - \delta_n < \mu < \overline{X}_n + \delta_n$. Possiamo riscrivere la prima disuguaglianza come

$$\overline{X}_n - \delta_n < \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{X}_n < \mu + \delta_n\,,$$

e la seconda come

$$\mu < \overline{X}_n + \delta_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{X}_n > \mu - \delta_n\,.$$

Questo mostra che

$$\{\mu \in I_{\delta_n}\} \;=\; \{\mu - \delta_n < \overline{X}_n < \mu + \delta_n\}\,,$$

per cui, applicando il teorema limite centrale e ricordando che $\sigma = 0.5$,

$$\begin{aligned}P(\mu \in I_{\delta_n}) = P(\mu - \delta_n < \overline{X}_n < \mu + \delta_n) &= P\left(\frac{-\delta_n}{0.5/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{-\delta_n}{0.5/\sqrt{n}}\right) \\ &\approx P\left(-2\delta_n\sqrt{n} < Z < 2\delta_n\sqrt{n}\right) = 2\,\Phi(2\delta_n\sqrt{n}) - 1\,,\end{aligned}$$

dove $Z \sim N(0,1)$ e $\Phi(x) = P(Z \leq x)$. Imponendo la condizione $P(\mu \in I_{\delta_n}) = 0.95$ si ottiene $\Phi(2\delta_n\sqrt{n}) = 0.975$, cioè $2\delta_n\sqrt{n} = \Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$ e quindi $\delta_n = 0.98/\sqrt{n}$.

Esercizio 14 Un grande studio fotografico riceve l'incarico di eseguire un servizio che prevede l'uso di speciali lampade ad alta luminosità. La durata di tali lampade ha distribuzione esponenziale di media uguale a 100 ore, e costano 100 Euro l'una. Le durate di lampade distinte si possono considerare indipendenti. Per il servizio si prevede siano necessarie 10000 ore di luce prodotta da tali lampade. Inoltre, a causa degli elevati costi di trasporto, è conveniente acquistare le lampade necessarie in un unico ordine.

(a) Usando l'approssimazione normale, si determini il minimo numero di lampade che è necessario acquistare affinché le 10000 ore di luce siano garantite con probabilità 0.95.

(b) Un'altra ditta di lampade propone un prodotto la cui durata ha distribuzione esponenziale di media 200 ore, al costo di 190 Euro per lampada. Ritenete sia conveniente acquistare da questa ditta anziché da quella del punto precedente? (Anche in questo caso le lampade vengono acquistate nel numero minimo necessario a garantire 10000 ore di luce con probabilità 0.95).

Soluzione.

(a) Sia $X_i \sim Exp(1/100)$ la durata dell'i-esima lampada. Se n è il numero di lampadine acquistate

$$\begin{aligned}P(X_1+X_2+\cdots+X_n \geq 10000) &= P\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n - 100n}{100\sqrt{n}} \geq \frac{10000-100n}{100\sqrt{n}}\right) \\ &\simeq P\left(N(0,1) \geq \frac{10000-100n}{100\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{100n-10000}{100\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{n-100}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Essendo $\Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.645$, dev'essere

$$\begin{aligned}\frac{n-100}{\sqrt{n}} \geq 1.645 \quad &\Longleftrightarrow \quad n - 1.645\sqrt{n} - 100 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq \frac{1.645 + \sqrt{1.645^2+400}}{2} \simeq 10.856 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 118.\end{aligned}$$

(b) Procedendo analogamente per $Y_i \sim Exp(1/200)$, si trova

$$\begin{aligned}P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n \geq 10000) &= P\left(\frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n - 200n}{200\sqrt{n}} \geq \frac{10000-200n}{200\sqrt{n}}\right) \\ &\simeq P\left(N(0,1) \geq \frac{10000-200n}{200\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{200n-10000}{200\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{n-50}{\sqrt{n}}\right),\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{n-50}{\sqrt{n}} \geq 1.645 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq \frac{1.645+\sqrt{1.645^2+200}}{2} \simeq 7.94 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 64.$$

La spesa totale, in Euro, per il primo tipo di lampade è perciò $118 \times 100 = 11800$, mentre con il secondo è $190 \times 64 = 12160$. Non è quindi conveniente acquistare questo tipo di lampade (nonostante durino mediamente il doppio costando meno del doppio!)

Esercizio 15 Un gioco consiste nell'estrarre a caso due carte da un mazzo di carte da Poker (52 carte, 4 semi); si vince se nessuna delle carte estratte è di quadri.

(a) Determinare la probabilità di successo in questo gioco.

(b) Per $n \geq 1$, sia p_n la probabilità che in $2n$ ripetizioni del gioco il numero di successi sia almeno n. Determinare, approssimativamente, il valore p_{50}.

(c) Determinare il minimo valore di n per cui $p_n \geq 1 - 10^{-4}$.

Soluzione.

(a) Essendoci 39 carte non di quadri, la probabilità di successo è

$$\frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{19}{34}.$$

(b) Sia $X_i Be(19/34)$ la variabile che vale 1 se e solo se la prova i-esima è un successo. Usando l'approssimazione normale, trascurando la correzione di continuità,

$$p_n = P(\overline{X}_{2n} \geq 1/2) = P\left(\frac{\overline{X}_{2n} - \frac{19}{34}}{\sqrt{\frac{19}{34}\frac{15}{34}}}\sqrt{2n} \geq \frac{\frac{1}{2} - \frac{19}{34}}{\sqrt{\frac{19}{34}\frac{15}{34}}}\sqrt{2n}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\frac{19}{34} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{19}{34}\frac{15}{34}}}\sqrt{2n}\right)$$

Per $n = 50$, si trova

$$p_{50} \simeq 0.8819$$

(c) Usando la formula al punto precedente, troviamo

$$p_n \geq 1 - 10^{-4} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\frac{19}{34} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{19}{34}\frac{15}{34}}}\sqrt{2n} \geq \Phi^{-1}(1 - 10^{-4}) \simeq 3.72$$

che fornisce $n \geq 493$.