Esercizi - Fascicolo VI

Esercizio 1 Vengono generati n numeri casuali tra 0 e 1, con distribuzione uniforme. Quanti numeri è necessario generare affinché la probabilità che la somma di essi sia compresa tra $0.49n$ e $0.51n$ sia maggiore o uguale a 0.99?

Esercizio 2 Un venditore porta a porta deve vendere 10 copie di un libro. Se ogni singolo cliente acquista il libro con probabilità 0.1, quanti clienti deve visitare il venditore affinché la probabilità di vendere tutti e dieci i libri sia almeno 0.99?

Esercizio 3 Calcolare approssimativamente la probabilità che una variabile casuale X con distribuzione di Poisson di parametro 100 assuma un valore minore di 95.

Esercizio 4 Un congegno è costituito da una componente elettrica che viene rimpiazzata non appena smette di funzionare. Dunque, se $T_1, T_2, \dots, T_n$ sono i tempi di vita di n componenti che si hanno a disposizione, il tempo di vita totale del congegno è $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. Si supponga che $T_i \sim Exp(1)$, e che le T_i siano indipendenti. Utilizzando l'approssimazione normale calcolare:

- se $n = 100$ la probabilità $P(T < 90)$;
- il valore minimo di n per cui $P(T < 90) \leq 0.05$.

Esercizio 5 Un giocatore di pallacanestro ha una percentuale di successo nei tiri da tre punti del 20%. Calcolare:

- la probabilità che in 100 tiri faccia non più di 54 punti;
- il numero minimo di tiri che deve effettuare per realizzare almeno 57 punti con probabilità maggiore o uguale a 0.95.

Esercizio 6 Il numero giornaliero di passeggeri sui treni da Milano a Firenze è una variabile aleatoria di distribuzione incognita. Supponendo che il valore atteso sia pari a 3000 e la varianza pari a 10^6 , si calcoli approssimativamente la probabilità che in 30 giorni il numero complessivo di viaggiatori sia almeno 10^5 .

Esercizio 7 Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione di Poisson di parametro 1. Usando opportunamente il Teorema del Limite Centrale per tale successione, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n+\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!}.$$

Esercizio 8 Il gruppo promotore di un referendum ritiene che il 60% della popolazione sia disposta a firmare per la relativa raccolta di firme. Si assuma che le persone a cui viene richiesto di firmare siano scelte a caso. Dovendo raccogliere 30.000 firme, quante persone è necessario interpellare affinché la soglia delle 30.000 firme sia raggiunta con probabilità di almeno 0,95?

Esercizio 9 Per una certa specie africana di uccelli, i neonati hanno – indipendentemente l’uno dal l’altro – una probabilità di sopravvivere al primo mese pari a $1/7$. Quelli che sopravvivono al primo mese hanno una probabilità pari a $1/3$ di superare l’anno.

- (a) Qual è la probabilità che un neonato sopravviva al primo anno?
- (b) Se un neonato muore entro il primo anno, qual è la probabilità che sia sopravvissuto al primo mese?
- (c) Si determini approssimativamente il numero minimo n di neonati da monitorare affinché la probabilità che ne sopravvivano almeno 30 dopo un mese sia almeno 0.95.

Esercizio 10 In una elezione votano un milione di persone, che devono scegliere tra i due candidati A e B . Il voto di un certo numero n di elettori è sotto il controllo di una organizzazione malavitosa, che garantisce che essi votino per il candidato A . Tutti gli altri elettori votano “a caso”, scegliendo con ugual probabilità i due candidati, ognuno indipendentemente dagli altri.

- (a) Supponiamo che l’organizzazione malavitosa controlli $n = 2000$ voti. Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato A vinca le elezioni?
- (b) Qual è il numero minimo n di individui che l’organizzazione malavitosa deve controllare, per garantire che la probabilità di vittoria di A sia almeno del 99%?

Esercizio 11 Siano C, X, Y variabili aleatorie reali indipendenti, con $X \sim Po(4)$, $Y \sim Po(4)$ mentre $C \sim Be(p)$, dove $p \in (0, 1)$ è un parametro fissato. Definiamo la variabile

$$W := CX + (1 - C)Y.$$

- (a) Si mostri che $E(W) = 4$ e $Var(W) = 4$.
- (b) Siano $W_1, W_2, \dots, W_{100}$ variabili i.i.d. con la stessa legge di W . Si determini approssimativamente il valore di c tale che la somma $W_1 + \dots + W_{100}$ assuma valori maggiori di c con probabilità 0.98.
- (c) Si dimostri che $W \sim Po(4)$.
[Sugg.: calcolare la densità discreta di W condizionando rispetto agli eventi $\{C = 0\}$ e $\{C = 1\}$]

Esercizio 12 Sia $(X_n)_{n=1}^N$ una famiglia di variabili casuali i.i.d., tali che $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Sia inoltre ξ una variabile casuale con la stessa distribuzione delle X_n e indipendente da tutte le X_n . Poniamo $Y_n := \xi X_n$.

- (a) Mostrare che le variabili casuali $(Y_n)_{n=1}^N$ sono i.i.d.
- (b) Mostrare che le variabili casuali bidimensionali $(X_n, Y_n)_{n=1}^N$ sono identicamente distribuite ma non indipendenti.

Esercizio 13 La lunghezza dei chiodini prodotti da una certa ditta ha una distribuzione incognita, la cui media e varianza indichiamo con μ e σ^2 . Il valore di σ^2 è noto e pari a 0.25 mm^2 , mentre il valore di μ (espresso in mm) è incognito e vogliamo stimarlo empiricamente.

A tal fine, misuriamo le lunghezze $X_1, \dots, X_n$ di n chiodini scelti a caso e ne indichiamo la media empirica con $\bar{X}_n := (X_1 + \dots + X_n)/n$. Se n è grande, per la legge dei grandi numeri sappiamo che $\bar{X}_n$ sarà vicino a μ . Per rendere più quantitativa questa affermazione, scegliamo un numero reale $\delta > 0$ e consideriamo l'intervallo I_δ di ampiezza δ centrato in $\bar{X}_n$, vale a dire

$$I_\delta := (\bar{X}_n - \delta, \bar{X}_n + \delta).$$

- Si determini δ_n in modo che la probabilità che l'intervallo I_{δ_n} contenga μ valga approssimativamente 0.95 per n grande.

[Sugg.: si esprima l'evento $\{\mu \in I_{\delta_n}\}$ nella forma $\{a < \bar{X}_n < b\}$ per opportuni a, b .]

Esercizio 14 Un grande studio fotografico riceve l'incarico di eseguire un servizio che prevede l'uso di speciali lampade ad alta luminosità. La durata di tali lampade ha distribuzione esponenziale di media uguale a 100 ore, e costano 100 Euro l'una. Le durate di lampade distinte si possono considerare indipendenti. Per il servizio si prevede siano necessarie 10000 ore di luce prodotta da tali lampade. Inoltre, a causa degli elevati costi di trasporto, è conveniente acquistare le lampade necessarie in un unico ordine.

- Usando l'approssimazione normale, si determini il minimo numero di lampade che è necessario acquistare affinché le 10000 ore di luce siano garantite con probabilità 0.95.
- Un'altra ditta di lampade propone un prodotto la cui durata ha distribuzione esponenziale di media 200 ore, al costo di 190 Euro per lampada. Ritenete sia conveniente acquistare da questa ditta anziché da quella del punto precedente? (Anche in questo caso le lampade vengono acquistate nel numero minimo necessario a garantire 10000 ore di luce con probabilità 0.95).

Esercizio 15 Un gioco consiste nell'estrarre a caso due carte da un mazzo di carte da Poker (52 carte, 4 semi); si vince se nessuna delle carte estratte è di quadri.

- Determinare la probabilità di successo in questo gioco.
- Per $n \geq 1$, sia p_n la probabilità che in $2n$ ripetizioni del gioco il numero di successi sia almeno n . Determinare, approssimativamente, il valore p_{50} .
- Determinare il minimo valore di n per cui $p_n \geq 1 - 10^{-4}$.