Prova Scritta di Probabilità e Statistica	Cognome: ____________________
Laurea in Matematica	Nome: ____________________
16 Luglio 2013	Matricola: ____________________

1 Parte teorica

1.1

Sia X una variabile aleatoria reale la cui funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$ è finita per $t \in (-a, a)$, per qualche $a > 0$. Mostrare che X ammette momenti di ogni ordine.

1.2

Si enunci la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

1.3

Si dia la definizione di spazio di probabilità discreto.

2 Esercizi

2.1

Sia U una variabile aleatoria assolutamente continua con distribuzione uniforme nell'intervallo $(0, 1)$, cioè

$$f_U(u) = \mathbf{1}_{(0,1)}(u).$$

Per $\alpha \in [0, 3/4]$, definiamo

$$X := \mathbf{1}_{(0,1/4)}(U)$$
$$Y := \mathbf{1}_{(\alpha,\alpha+1/4)}(U).$$

(i) Per quali valori di α le variabili aleatorie X e Y hanno la stessa distribuzione?

(ii) Per quali valori di α si ha che $|\rho(X, Y)| = 1$, dove

$$\rho(X, Y) := \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

è il coefficiente di correlazione fra X e Y?

(iii) Per quali valori di α le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

Soluzione.

(i) Si noti che X e Y assumono solo i valori 0 e 1, quindi sono variabili aleatorie di Bernoulli. Poiché, per ogni $\alpha \in [0, 3/4]$, $P(X = 1) = P(Y = 1) = 1/4$, hanno la stessa distribuzione $Be(1/4)$.

(ii) Si noti che

$$P(XY=1)=\begin{cases} 1/4-\alpha & \text{se } 0\le\alpha<1/4 \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Essendo $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$, si ha

$$Cov(X,Y)=\begin{cases} \frac{1}{4}-\alpha-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}-\alpha & \text{se } 0\le\alpha<1/4 \\ -\frac{1}{16} & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Osservando che $Var(X)=Var(Y)=\frac{3}{16}$, otteniamo

$$\rho(X,Y)=\begin{cases} 1-\frac{16\alpha}{3} & \text{se } 0\le\alpha<1/4 \\ -\frac{1}{3} & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Ne segue che l'unico valore di α per cui $|\rho(X,Y)|=1$ è $\alpha=0$.

(iii) Poiché se X e Y sono indipendenti allora $Cov(X,Y)=0$, l'unico valore possibile è $\alpha=\frac{3}{16}$. Verifichiamo che, in questo caso, X e Y sono effettivamente indipendenti.

$$\begin{aligned} P(X=1,Y=1)&=P(U\in(3/16,1/4))=1/16=P(X=1)P(Y=1)\\ P(X=1.Y=0)&=P(U\in(0,3/16])=3/16=P(X=1)P(Y=0)\end{aligned}$$

e analogamente per gli altri due casi.

2.2

Un'urna contiene n palline, su ognuna delle quali è scritto un numero. Siano $k_1,k_2,\ldots,k_n$ i numeri (non necessariamente distinti) scritti sulle n palline.

(a) Estraiamo a caso una pallina, e sia X il numero scritto sulla pallina estratta. Si determini $E(X)$

(b) Supponiamo, invece, di estrarre due palline, senza reimmissione, e sia Y la media aritmetica dei numeri scritti sulle due palline. Quanto vale $E(Y)$?

Soluzione.

(a) L'estrazione può essere modellata con il seguente spazio di probabilità: $\Omega=\{1,2,\ldots,n\}$, $P=$ probabilità uniforme su Ω. Si noti che $X(i)=k_i$. Quindi

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\{\omega\})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

(b) In questo caso sia $\Omega=\{(i,j),1\le i,j\le n,\ i\ne j\}$, e P la probabilità uniforme su Ω. Inoltre $Y(i,j)=\frac{k_i+k_j}{2}$, per ogni $(i,j)\in\Omega$. Perciò

$$\begin{aligned} E(X)&=\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)P(\{\omega\})=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\ne j}\frac{k_i+k_j}{2}\\ &=\frac{1}{2n(n-1)}\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n}k_i+(n-1)\sum_{j=1}^{n}k_j\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i.\end{aligned}$$

2.3

Siano $X_1, X_2, \dots, X_n \sim U(0,1)$ indipendenti, e sia $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, indipendente da $X_1, X_2, \dots, X_n$. Definiamo

$$Y := \begin{cases} \max(X_1, X_2, \dots, X_N) & \text{se } N \geq 1 \\ 0 & \text{se } N = 0. \end{cases}$$

Si determini la distribuzione di Y. *Sugg.: si osservi che*

$$\{Y \leq y, N = k\} = \{\max(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq y, N = k\},$$

e si ricordi che $P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Soluzione. Abbiamo, per $y \in (0,1)$, usando l'indipendenza e il fatto che $P(X_1 \leq y) = y$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{k=0}^{N} P(Y \leq y, N = k) &= P(N = 0) + \sum_{k=1}^{N} P(\max(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq y, N = k) \\ &= P(N = 0) + \sum_{k=1}^{N} P(\max(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq y) P(N = k) \\ &= P(N = 0) + \sum_{k=1}^{N} y^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N} y^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [1 - p + yp]^n. \end{aligned}$$

Ovviamente F_Y vale 0 in $(-\infty, 0]$ e 1 in $[1, +\infty)$. In particolare è $\mathcal{C}^1$ a tratti. Si noti che F_Y è discontinua in $y = 0$, quindi Y non è né discreta né assolutamente continua.

2.4

In un gioco perdo un euro con probabilità 1/2 e vinco due euro con probabilità 1/2. Quante ripetizioni indipendenti del gioco devo giocare per vincere almeno 100 euro con probabilità non minore di 0.95? (usare l'approssimazione normale, $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$)

Soluzione. Siano X_n variabili i.i.d. con $P(X_n = -1) = P(X_n = 2) = 1/2$. Notare che

$$\mu = E(X_n) = \frac{1}{2} \quad \sigma^2 = Var(X_n) = 9/4.$$

Vogliamo che sia

$$P(X_1 + \cdots + X_n \geq 100) \geq 0.95.$$

Usando l'approssimazione normale con la correzione di continuità

$$\begin{aligned} P(X_1 + \cdots + X_n \geq 100) = P(X_1 + \cdots + X_n \geq 99.5) &= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \geq \frac{99.5 - \frac{n}{2}}{3\sqrt{n}/2} \right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{-99.5 + \frac{n}{2}}{3\sqrt{n}/2} \right). \end{aligned}$$

Poniamo quindi

$$\frac{-99.5 + \frac{n}{2}}{3\sqrt{n}/2} \geq \Phi^{-1}(0.95) = 1.645.$$

Cioè

$$n - 3 \cdot 1.645\sqrt{n} - 2 \cdot 99.5 \geq 0,$$

che fornisce $n \geq 282$.

2.5

Per $\alpha > 1/2$ e $\lambda > 0$, sia $A \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, cioè

$$f_A(z) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(z).$$

Sia inoltre X l'ascissa positiva di un'intersezione fra la parabola di equazione $y = Ax^2 + 1$ e la retta $y = 2$.

(a) Si determini la densità di X.

(b) Si mostri che

$$E(X) = \sqrt{\lambda} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Soluzione.

(a) Dopo aver notato che $X = \frac{1}{\sqrt{A}}$, si vede che per $x > 0$

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(A \ge 1/x^2) = 1 - F_A(1/x^2).$$

In particolare F_X è $\mathcal{C}^1$ a tratti, perciò X è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{2}{x^3} f_A(1/x^2) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{2}{x^{2\alpha+1}} e^{-\lambda/x^2} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x).$$

(b)

$$\begin{aligned} E(X) = E(1/\sqrt{A}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} f_A(z) dz = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} z^{\alpha - \frac{1}{2} - 1} e^{-\lambda z} dz \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\lambda^{\alpha - \frac{1}{2}}} = \sqrt{\lambda} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità

$$\int_0^{+\infty} z^{\alpha - \frac{1}{2} - 1} e^{-\lambda z} dz = \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\lambda^{\alpha - \frac{1}{2}}}.$$