I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________
Laurea in Matematica	Nome: ______________
23 aprile 2013	Matricola: ______________

TEMA A

1 Parte teorica

1.1

Fornire la definizione di indipendenza per n eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$.

1.2

Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità. Si dimostri che vale la seguente affermazione: per ogni successione $(A_n)_{n\geq 1}$ di eventi tali che $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

2 Esercizi

2.1

Devo aprire una porta che si apre con una e una sola delle n chiavi del mazzo in mio possesso. Si dica qual è la probabilità di aprire la porta al k-esimo tentativo se

(a) mi ricordo le chiavi che ho già provato;

(b) non mi ricordo le chiavi che ho già provato.

Soluzione.

(a) In questo caso scelgo le chiavi una alla volta, come in uno schema di estrazioni senza reimmissione. Fra i vari modi di giungere alla soluzione, uno molto diretto è il seguente. Sia A_k = "apro la porta al $k$esimo tentativo, e B_k = "non ho aperto la porta nei primi $k-1$ tentativi, con $k = 1, 2, \dots, n$. Abbiamo

$$P(A_k) = P(A_k \cap B_k) = P(A_k|B_k)P(B_k).$$

Chiaramente, $P(A_k|B_k) = \frac{1}{n-k+1}$. Inoltre, poiché nei primi $k-1$ ogni $k-1$-pla di chiavi viene scelta con la stessa probabilità, $P(B_k)$ è uguale al rapporto fra il numero di $k-1$-ple che non contengono la chiave "giusta" e il numero di tutte le $k-1$-ple di chiavi:

$$P(B_k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}$$

(notare che $P(B_1) = 1$). Dunque

$$P(A_k) = P(A_k \cap B_k) = P(A_k|B_k)P(B_k) = \frac{1}{n-k+1} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{1}{n}.$$

(b) In questo caso, ogni tentativo di aprire è indipendente dai precedenti. Si tratta dunque di uno schema di prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo $\frac{1}{n}$. La probabilità cercata è la probabilità che il primo successo avvenga alla k-esima prova, cioè

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}.$$

2.2

Sto giocando un torneo di *Ruzzle* con Francesco. Vince il torneo il primo che vince 5 partite. In questo momento io ho vinto 2 partite e Francesco 3. La probabilità che io vinca una partita è p, indipendentemente dagli esiti delle altre partite. Qual è la probabilità che io vinca il torneo?

Soluzione. Un modo per giungere alla soluzione è di elencare tutte le sequenze di successi-insuccessi che conducono alla mia vittoria. Scrivendo S per successo e I per insuccesso, tali sequenze sono: SSS, ISSS, SISS, SSIS, da cui si ottiene la probabilità

$$p^3 + 3p^3(1-p).$$

2.3

Siano U e V due variabili aleatorie a valori in $\{-1, 1\}$ tali che

$$P(U = 1) = P(U = -1) = \frac{1}{2} \quad P(V = 1|U = 1) = P(V = -1|U = -1) = \frac{1}{3}.$$

(a) Si determini la densità congiunta di (U, V) e la densità marginale di V.

(b) Si calcoli la probabilità che l'equazione $x^2 + Ux + V$ ammetta soluzioni reali.

(c) Definiamo

$$X := \begin{cases} \text{la massima soluzione dell'equazione } x^2 + Ux + V & \text{se esiste una soluzione reale} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si determini la densità di X.

(d) Siano $(U_1, V_1), (U_2, V_2), \ldots, (U_n, V_n)$ n variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{-1, 1\}^2$, ognuna delle quali ha la stessa distribuzione di (U, V). Sia

$$Z := |\{i : U_i = V_i, i = 1, 2, \ldots, n\}|.$$

Si determini la densità di Z.

Soluzione.

(a) Sia $s \in \{-1, 1\}$. Sappiamo che $P(U = s) = \frac{1}{2}$, $P(V = s|U = s) = \frac{1}{3}$, e quindi $P(V = -s|U = s) = \frac{2}{3}$. Perciò

$$p_{U,V}(s, s) = P(V = s|U = s)P(U = s) = \frac{1}{6}$$
$$p_{U,V}(-s, s) = P(V = -s|U = s)P(U = s) = \frac{1}{3}.$$

Inoltre

$$p_V(1) = 1 - p_V(-1) = p_{U,V}(1, 1) + p_{U,V}(-1, 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(b) L'equazione ammette soluzioni reali se e solo se $U^2 - 4V \geq 0$, il che avviene se e solo se $V = -1$, che ha probabilità $\frac{1}{2}$.

(c) Se $V = -1$, la massima soluzione è

$$\frac{-U + \sqrt{U^2 + 4}}{2}.$$

Si ha allora

$$p_X\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = P(U = -1, V = -1) = \frac{1}{6}$$
$$p_X\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = P(U = 1, V = -1) = \frac{1}{3}$$
$$p_X(0) = P(V = 1) = \frac{1}{2}$$

(d) Il problema cade nello schema delle prove ripetute indipendenti. La prova $i$esima æun successo se e solo se $U_i = V_i$, il che accade con probabilità

$$p_{U,V}(1,1) + p_{U,V}(-1,-1) = \frac{1}{3}.$$

Pertanto, per $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$p_Z(k) = \binom{n}{k}\frac{1}{3^k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$