I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ____________
Laurea in Matematica	Nome: ____________
23 aprile 2013	Matricola: ____________

TEMA B

1 Parte teorica

1.1

Si dia la definizione di spazio di probabilità discreto.

1.2

Siano X e Y due variabili aleatorie definite nello stesso spazio di probabilità discreto (Ω, P), e a valori negli insiemi E e F rispettivamente. Se $p_{X,Y}$ denota la loro densità congiunta e p_X la densità di X, dimostrare che

$$p_X(x) = \sum_{y \in F} p_{X,Y}(x, y)$$

per ogni $x \in E$.

2 Esercizi

2.1

Siano A e B due eventi tali che $P(A) = \frac{3}{4}$ e $P(B) = \frac{1}{3}$. Mostrare che $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Si mostri con degli esempi che in queste disuguaglianze gli estremi possono essere raggiunti.

Soluzione. Dato che $A \cap B \subseteq B$, si ha $P(A \cap B) \leq P(B) = \frac{1}{3}$. Inoltre, da

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

si ricava

$$P(A \cap B) \geq \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{12}.$$

Sia ora $\Omega := \{1, 2, \ldots, 12\}$, munito della probabilità uniforme P. Posto $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ si ha $P(A) = \frac{3}{4},\ P(B) = \frac{1}{3},\ P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, mentre ponendo $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $B = \{9, 10, 11, 12\}$ abbiamo $P(A) = \frac{3}{4},\ P(B) = \frac{1}{3},\ P(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

2.2

Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono, senza reimmissione, le palline una alla volta, finché l'urna non è vuota. Sia

$$A_{i,j} = \text{“ la pallina } i \text{ è stata estratta alla } j\text{-esima estrazione.}$$

Definiamo gli eventi:

$$B := \bigcup_{i=1}^{5} A_{1,2i} \qquad C := \bigcup_{i=6}^{10} A_{4,i} \qquad D := \bigcap_{i=1}^{5} \bigcup_{j=1}^{5} A_{2i,2j}.$$

Calcolare $P(B)$, $P(C)$ e $P(D)$.

Soluzione. Osserviamo anzitutto che, per ogni i, j, $P(A_{i,j}) = \frac{1}{10}$, e che $A_{i,j} \cap A_{i,h} = \emptyset$ se $j \neq h$. Da ciò segue subito che $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Per calcolare $P(D)$ osserviamo che una sequenza di estrazioni di 10 palline si può identificare con una permutazione di 10 elementi. Gli elementi di D sono le permutazioni che mandano i numeri pari nei numeri pari, e quindi i dispari nei dispari. Ogni elemento di D è perciò identificato dalla scelta di una permutazione dei numeri pari (5! possibilità) e di una permutazione dei numeri dispari (5! possibilità). Quindi

$$P(D) = \frac{5!5!}{10!} = \frac{1}{\binom{10}{5}}.$$

2.3

Una moneta non equilibrata è tale che la probabilità di ottenere testa in un lancio è $p \in (0,1)$. Se si eseguono n lanci, sia u_n la probabilità che *non* si ottengano due teste consecutive.

(a) Si calcoli u_2 e u_3.

(b) Si mostri che per ogni $n \geq 2$

$$u_{n+2} = (1-p)u_{n+1} + p(1-p)u_n.$$

Soluzione.

(a) u_2 è la probabilità che in due lanci *non* si ottengano due teste, cioè $1 - p^2$. Similmente, $1 - u_3$ è la probabilità che in tre lanci si ottengano una delle seguenti sequenze: TTT, TTC, CTT. Quindi

$$u_3 = 1 - p^3 - 2p^2(1-p).$$

(b) Consideriamo l'evento: $B =$ "nel lancio $n+2$-esimo si ottiene testa". Se $A_k =$ " nei primi k lanci non si ottengono due teste consecutive", abbiamo

$$P(A_{n+2}) = P(A_{n+2}|B)P(B) + P(A_{n+2}|B^c)P(B^c) = pP(A_{n+2}|B) + (1-p)P(A_{n+2}|B^c).$$

Se si verifica B^c, si verifica A_{n+2} se e solo se nei primi $n+1$ lanci non si sono ottenute due teste consecutive, cioè

$$P(A_{n+2}|B^c) = u_{n+1}.$$

se invece si verifica B, si verifica A_{n+2} se e solo se nel lancio $n+1$-esimo si ottiene una croce, e nei primi n lanci non si ottengono due teste consecutive. Per l'indipendenza degli esiti di lanci distinti:

$$P(A_{n+2}|B) = (1-p)u_n,$$

da cui

$$u_{n+2} = P(A_{n+2}) = pP(A_{n+2}|B) + (1-p)P(A_{n+2}|B^c) = p(1-p)u_n + (1-p)u_{n+1}.$$