I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________
Laurea in Matematica	Nome: ______________
23 aprile 2013	Matricola: ______________

TEMA C

1 Parte teorica

1.1

Si dia la definizione di indipendenza per n variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

1.2

Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità. Si dimostri che vale la seguente affermazione: per ogni successione $(A_n)_{n\geq 1}$ di eventi tali che $A_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

2 Esercizi

2.1

Giovanna ha tre figli, ognuno dei quali può essere maschio o femmina con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri. Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“i figli hanno lo stesso sesso”} \\ B &= \text{“fra i figli al più uno è maschio”} \\ C &= \text{“fra i figli vi sono almeno un maschio e una femmina”} \end{aligned}$$

(a) Mostrare che A e B sono indipendenti, e che B e C sono indipendenti.

(b) A e C sono indipendenti?

(c) Come cambiano le risposte al punto (a) se Giovanna ha quattro figli invece di tre?

Soluzione. Scrivendo F per femmina e M per maschio, consideriamo $\Omega := \{F, M\}^3$, con la probabilità uniforme.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{FFF, MMM\}) = \frac{1}{4} \\ P(B) &= P(\{FFF, MFF, FMF, FFM\}) = \frac{1}{2} \\ P(C) &= P(\{FFF, MMM\}^c) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(a)
$$P(A \cap B) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8} = P(A)P(B).$$
$$P(B \cap C) = P(\{MFF, FMF, FFM\}) = \frac{3}{8} = P(B)P(C).$$

(b)
$$P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B),$$
quindi A e C non sono indipendenti.

(c) In questo caso $\Omega := \{F, M\}^4$.
$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{FFFF, MMMM\}) = \frac{1}{8} \\ P(B) &= P(\{FFFF, MFFF, FMFF, FFMF, FFFM\}) = \frac{5}{16} \\ P(C) &= P(\{FFFF, MMMM\}^c) = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Inoltre
$$P(A \cap B) = P(\{FFFF\}) = \frac{1}{16} \neq P(A)P(B).$$
$$P(B \cap C) = P(\{MFFF, FMFF, FFMF, FFFM\}) = \frac{1}{4} \neq P(B)P(C).$$
Quindi né Ae B, né B e C sono indipendenti.

2.2

Quattro urne numerate da 1 a 4 contengono ognuna una pallina bianca e una nera, mentre un'altra urna, la numero 5, è inizialmente vuota. Comincio ad estrarre una pallina dall'urna 1, e la inserisco nell'urna 5. Se tale pallina era nera non eseguo più alcuna estrazione. Altrimenti estraggo una pallina dall'urna 2, e la inserisco nell'urna 5; se tale pallina era bianca passo all'urna 3, altrimenti smetto. Proseguo allo stesso modo, eventualmente fino ad estrarre una pallina dall'urna 4, inserendola poi nell'urna 5.

(a) Se alla fine estraggo una pallina dall'urna 5, qual è la probabilità che sia nera?

(b) Se la pallina estratta dall'urna 5 è nera, qual è la probabilità che tale pallina provenga dall'urna k, con $k \in \{1, 2, 3, 4\}$?

(c) Si consideri le seguenti variabili aleatorie:

$X :=$ numero di palline contenute nell'urna 5 (dopo aver completato le estrazioni dalle altre urne)
$$Y := \begin{cases} 1 & \text{se la pallina estratta dall'urna 5 è nera} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si determini la densità congiunta di X e Y.

Soluzione.

(a) Consideriamo gli eventi: A_k = "dall'urna k è stata estratta una pallina nera", per $k = 1, 2, 3, 4$, A_0 = "non è stata estratta alcuna pallina nera", B = "dall'urna 5 è stata estratta una pallina nera. Abbiamo: $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{1}{4}$, $P(A_3) = \frac{1}{8}$, $P(A_4) = P(A_0) = \frac{1}{16}$. Inoltre

$$\begin{aligned} P(B|A_k) &= \frac{1}{k} \quad \text{se } k = 1, 2, 3, 4 \\ &= 0 \quad \text{se } k = 5 \end{aligned}$$

Perciò, per la formula delle probabilità totali,

$$P(B) = \sum_k P(B|A_k)P(A_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} = \frac{131}{192}$$

(b) Per la formula di Bayes

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{k2^k}}{\frac{131}{192}}.$$

(c) Da quanto visto al punto (a)

$$\begin{aligned} p_X(1) &= P(A_1) = \frac{1}{2} \\ p_X(2) &= P(A_2) = \frac{1}{4} \\ p_X(3) &= P(A_3) = \frac{1}{8} \\ p_X(4) &= P(A_4) + P(A_0) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(1,1) &= P(A_1 \cap B) = P(B|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2} \\ p_{X,Y}(1,0) &= P(A_1 \cap B^c) = P(A_1) - P(A_1 \cap B) = 0 \\ p_{X,Y}(2,1) &= P(A_2 \cap B) = P(B|A_2)P(A_2) = \frac{1}{8} \\ p_{X,Y}(2,0) &= P(A_2 \cap B^c) = P(A_2) - P(A_2 \cap B) = \frac{1}{8} \\ p_{X,Y}(3,1) &= P(A_3 \cap B) = P(B|A_3)P(A_3) = \frac{1}{24} \\ p_{X,Y}(3,0) &= P(A_3 \cap B^c) = P(A_3) - P(A_3 \cap B) = \frac{1}{12} \\ p_{X,Y}(4,1) &= P((A_0 \cup A_4) \cap B) = P(B|A_4)P(A_4) = \frac{1}{64} \\ p_{X,Y}(4,0) &= P((A_0 \cup A_4) \cap B^c) = P(A_0) + P(A_4) - P(A_4 \cap B) = \frac{7}{64} \end{aligned}$$

2.3

Siano A e B due eventi tali che $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. Mostrare che $\frac{1}{10} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$.
Soluzione. Dato che $A \cap B \subseteq B$, si ha $P(A \cap B) \leq P(B) = \frac{1}{2}$. Inoltre, da

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

si ricava

$$P(A \cap B) \geq \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{10}.$$