I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________________
Laurea in Matematica	Nome: ______________________
23 aprile 2013	Matricola: ______________________

TEMA D

1 Parte teorica

1.1

Si dia la definizione di spazio di probabilità discreto.

1.2

Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità, e siano X e Y due variabili aleatorie definite su esso e a valori in E e F rispettivamente. Si dimostri che vale la seguente affermazione: X e Y sono indipendenti se e solo se

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

per ogni $x \in E$ e $y \in F$, dove $p_{X,Y}$ denota la densità congiunta di X e Y, mentre p_X e p_Y denotano le densità marginali.

2 Esercizi

2.1

Sto giocando a tennis con Francesco, una partita "al meglio dei 5 set", cioè vince la partita il primo che riesce a vincere 3 set. Io vinco un set con probabilità $p \in (0,1)$ indipendentemente dai risultati degli altri set. In questo momento Francesco è in vantaggio un set a zero. Qual è la probabilità che io vinca la partita?

Soluzione. Un modo per giungere alla soluzione è di elencare tutte le sequenze di successi-insuccessi che conducono alla mia vittoria. Scrivendo S per successo e I per insuccesso, tali sequenze sono: SSS, ISSS, SISS, SSIS, da cui si ottiene la probabilità

$$p^3 + 3p^3(1-p).$$

2.2

Siano A e B due eventi tali che $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. Mostrare che $\frac{1}{10} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$. Si mostri con degli esempi che in queste disuguaglianze gli estremi possono essere raggiunti.

Soluzione. Dato che $A \cap B \subseteq B$, si ha $P(A \cap B) \leq P(B) = \frac{1}{2}$. Inoltre, da

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

si ricava

$$P(A \cap B) \geq \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{10}.$$

Sia ora $\Omega := \{1,2,\ldots,10\}$, munito della probabilità uniforme P. Posto $A = \{1,2,\ldots,6\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$ si ha $P(A) = \frac{3}{5},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(A\cap B) = \frac{1}{2}$, mentre ponendo $A = \{1,2,\ldots,6\}$ e $B = \{5,6,7,8,9,10\}$ abbiamo $P(A) = \frac{3}{5},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(A\cap B) = \frac{1}{10}$.

2.3

Siano U e V due variabili aleatorie a valori in $\{-1,1\}$ tali che

$$P(U=1) = P(U=-1) = \frac{1}{2}\quad P(V=1|U=1) = P(V=-1|U=-1) = \frac{1}{3}.$$

(a) Si determini la densità congiunta di (U,V) e la densità marginale di V.

(b) Si calcoli la probabilità che l'equazione x^2+Ux+V ammetta soluzioni reali.

(c) Definiamo

$$X := \begin{cases} \text{la massima soluzione dell'equazione } x^2+Ux+V & \text{se esiste una soluzione reale} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si determini la densità di X.

(d) Siano $(U_1,V_1),(U_2,V_2),\ldots,(U_n,V_n)$ n variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{-1,1\}^2$, ognuna delle quali ha la stessa distribuzione di (U,V). Sia

$$Z := |\{i : U_i = V_i, i = 1,2,\ldots,n\}|.$$

Si determini la densità di Z.

Soluzione.

(a) Sia $s \in \{-1,1\}$. Sappiamo che $P(U=s) = \frac{1}{2}$, $P(V=s|U=s) = \frac{1}{3}$, e quindi $P(V=-s|U=s) = \frac{2}{3}$. Perciò

$$p_{U,V}(s,s) = P(V=s|U=s)P(U=s) = \frac{1}{6}$$
$$p_{U,V}(-s,s) = P(V=-s|U=s)P(U=s) = \frac{1}{3}.$$

Inoltre

$$p_V(1) = 1 - p_V(-1) = p_{U,V}(1,1) + p_{U,V}(-1,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(b) L'equazione ammette soluzioni reali se e solo se $U^2 - 4V \geq 0$, il che avviene se e solo se $V=-1$, che ha probabilità $\frac{1}{2}$.

(c) Se $V=-1$, la massima soluzione è

$$\frac{-U+\sqrt{U^2+4}}{2}.$$

Si ha allora

$$p_X\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = P(U=-1,V=-1) = \frac{1}{6}$$
$$p_X\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = P(U=1,V=-1) = \frac{1}{3}$$
$$p_X(0) = P(V=1) = \frac{1}{2}$$

(d) Il problema cade nello schema delle prove ripetute indipendenti. La prova $i$esima æun successo se e solo se $U_i = V_i$, il che accade con probabilità

$$p_{U,V}(1,1) + p_{U,V}(-1,-1) = \frac{1}{3}.$$

Pertanto, per $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$p_Z(k) = \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$