Prova Scritta di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________
Laurea in Matematica	Nome: ______________
20 Giugno 2013	Matricola: ______________

1 Parte teorica

1.1

Fornire la definizione di indipendenza per n eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$.

1.2

Si enunci, e si dimostri, la disuguaglianza di Jensen.

1.3

Sia dia la definizione di variabile aleatoria assolutamente continua.

2 Esercizi

2.1

Un'urna contiene, inizialmente, b palline bianche e r palline rosse. Si consideri il seguente schema di estrazione, detto di *Polya*: dopo aver estratto una pallina la si reinserisce, e si aggiunge un'ulteriore pallina dello stesso colore di quella estratta.

(a) Se la seconda pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che lo fosse anche la prima?

(b) Se la terza pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che lo fosse anche la prima?

Soluzione. Sia R_i = "la pallina estratta all'i-ma estrazione è rossa".

(a)

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1},$$

e

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(R_1^c \cap R_2) = \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+1} = \frac{r}{b+r},$$

da cui

$$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{r+1}{b+r+1}.$$

(b)

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_3) &= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap R_2^c \cap R_3) \\ &= \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1}\frac{r+2}{b+r+2} + \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r+1}\frac{r+1}{b+r+2} \\ &= \frac{r(r+1)}{(b+r)(b+r+1)} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
P(R_3) &= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1 \cap R_2^c \cap R_3) + P(R_1^c \cap R_2 \cap R_3) + P(R_1^c \cap R_2^c \cap R_3) \\
&= \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1}\frac{r+2}{b+r+2} + \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r+1}\frac{r+1}{b+r+2} \\
&\quad + \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+1}\frac{r+1}{b+r+2} + \frac{b}{b+r}\frac{b+1}{b+r+1}\frac{r}{b+r+2} = \frac{r}{b+r}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
P(R_1|R_3) = \frac{P(R_1 \cap R_3)}{P(R_3)} = \frac{r+1}{b+r+1}.
$$

2.2

In un modello a tempo discreto di evoluzione di una popolazione di cellule, si assume che in ogni instante $t \in \mathbb{N}$ ogni cellula abbia probabilità $p \in (0,1)$ di morire, indipendentemente dalle altre cellule. Sia X_t il numero di cellule vive all'istante t, e si assuma che $X_0 \sim Pois(\lambda)$.

(a) Si determini la densità congiunta di (X_0, X_1).

(b) Si determini la distribuzione di X_1.

(c) Si determini la distribuzione di X_t per ogni $t \in \mathbb{N}_0$.

(d) Sia T il *tempo di estinzione* della popolazione, cioè

$$
T := \min\{t \geq 0 : X_t = 0\}.
$$

Si determini la densità di T. Sugg.: notare che $\{T \leq t\} = \{X_t = 0\}$.

Soluzione.

(a)

$$
p_{X_0,X_1}(n,m) = P(X_1 = m | X_0 = n) P(X_0 = n) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.
$$

(b)

$$
p_{X_1}(m) = \sum_n p_{X_0,X_1}(n,m) = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!},
$$

cioè $X_1 \sim Pois(\lambda(1-p))$.

(c) Iterando quanto fatto al punto (b), $X_t \sim Pois(\lambda(1-p)^t)$.

(d) Per $t \geq 1$

$$
p_T(t) = P(T \leq t) - P(T \leq t-1) = P(X_t = 0) - P(X_{t-1} = 0) = e^{-\lambda(1-p)^t} - e^{-\lambda(1-p)^{t-1}}
$$

mentre

$$
p_T(0) = P(X_0 = 0) = e^{-\lambda}.
$$

2.3

Sia $\Theta \sim U(0, \pi/2)$, e sia P il punto del piano ottenuto come intersezione della semiretta uscente dall'origine O e che forma un angolo Θ con il semiasse positivo delle x, con la curva γ contenuta nel primo quadrante e di equazione $x^2 y = 1$. Sia X l'area compresa fra l'asse delle x, il segmento OP e la curva γ. Determinare la distribuzione di X, e mostrare che X ammette valor medio finito.

Soluzione. Il punto P si trova come intersezione, nel primo quadrante, della retta $y = \tan(\Theta)x$ e $x^2 y = 1$, che fornisce

$$P = \left(\tan^{-1/3}(\Theta), \tan^{2/3}(\Theta)\right).$$

L'area X è pertanto somma dell'area del triangolo OPH, dove $H = \left(\tan^{-1/3}(\Theta), 0\right)$, con l'area della superficie compresa fra l'asse delle x, il segmento HP e la curva γ. Pertanto

$$X = \frac{1}{2}\tan^{1/3}(\Theta) + \int_{\tan^{-1/3}(\Theta)}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{3}{2}\tan^{1/3}(\Theta).$$

Perciò, per $x > 0$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{3}{2}\tan^{1/3}(\Theta) \leq x\right) = P\left(\Theta \leq \arctan\left(\frac{8}{27}x^3\right)\right) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{8}{27}x^3\right),$$

mentre $F_X(x) = 0$ per $x \leq 0$. Essendo F_X di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, X è assolutamente continua, con densità

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\frac{8}{9}x^2}{1 + \frac{64}{729}x^6}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x).$$

Il fatto che X ammetta valor medio finito segue dal fatto che $x f_X(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $(0, +\infty)$, essendo $x f_X(x) = O(1/x^3)$ per $x \to +\infty$.

2.4

Sia $\rho \in (0, 1)$, e sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, con valor medio $E(X_n) = 0$, e tali che $Var(X_n) = \rho^{2n}$. Si definisca, per induzione, la successione di variabili aleatorie $(Y_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \rho Y_n + X_{n+1} \\ Y_0 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Si dimostri che $Var(Y_n) = n\rho^{2n}$.

(b) Si dimostri che, per ogni $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| > \epsilon) = 0.$$

(c) Si dimostri la proprietà enunciata in (b) usando la seguente ipotesi, più debole di quella iniziale, sulla varianza di X_n:

$$\lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0.$$

Soluzione.

(a) Si mostra immediatamente per induzione che, per $n \geq 0$

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \rho^{n-k} X_k. \tag{1}$$

Per l'indipendenza delle X_k:

$$Var(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \rho^{2(n-k)} Var(X_k) = n\rho^{2n}.$$

(b) Si noti che da (**??**) segue che $E(Y_n) = \rho^n$. Per la disuguaglianza di Markov

$$P(|Y_n| > \epsilon) = P(Y_n^2 > \epsilon^2) \leq \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon^2} = \frac{Var(Y_n) + E^2(Y_n)}{\epsilon^2} = \frac{(n+1)\rho^{2n}}{\epsilon^2},$$

da cui si conclude.

(c) Seguendo lo stesso argomento usato in (b), la conclusione segue se mostriamo che

$$\lim_{n \to +\infty} Var(Y_n) = 0.$$

Usiamo il fatto che

$$Var(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \rho^{2(n-k)} Var(X_k).$$

Sia $\delta > 0$ fissato ma arbitrario. Per ipotesi, esiste M tale che $Var(X_k) \leq \delta$ per ogni $k > M$. Allora, per n abbastanza grande,

$$\begin{aligned}
Var(Y_n) = \sum_{k=0}^{M} \rho^{2(n-k)} Var(X_k) &+ \sum_{k=M+1}^{n} \rho^{2(n-k)} Var(X_k) \\
&\leq \rho^{n-M} \sum_{k=0}^{M} Var(X_k) + \delta \sum_{k=M+1}^{n} \rho^{2(n-k)} \\
&\leq \rho^{n-M} \sum_{k=0}^{M} Var(X_k) + \delta \sum_{i=0}^{+\infty} \rho^{i} \leq \rho^{n-M} \sum_{k=0}^{M} Var(X_k) + \frac{\delta}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

Si ha perciò che

$$\limsup_{n} Var(Y_n) \leq \frac{\delta}{1-\rho},$$

e per l'arbitrarietà di δ si conclude che

$$\lim_{N \to +\infty} Var(Y_n) = 0.$$