

|                                                                                              |                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>Prova Scritta di Probabilità e Statistica</b><br>Laurea in Matematica<br>27 Febbraio 2014 | Cognome: _____<br>Nome: _____<br>Matricola: _____ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|

## 1 Parte teorica

### 1.1

Si enunci e dimostri la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

### 1.2

Si dia la definizione di valor medio per variabili aleatorie discrete, enunciandone le principali proprietà.

### 1.3

Si dia la definizione variabile aleatoria assolutamente continua.

## 2 Esercizi

### 2.1

Lanciamo ripetutamente un dado regolare a 6 facce, e siano  $(X_n)_{n \geq 1}$  i risultati dei lanci successivi. Siano, inoltre

$$Y := \min\{n : X_n = 1\} \quad \text{e} \quad Z := \min\{n : X_n = 6\}$$

rispettivamente il primo lancio in cui esce 1 e il primo lancio in cui esce 6.

- Determinare la densità congiunta di  $(Y, Z)$ .
- Posto  $U := \min(Y, Z)$ ,  $V := \max(Y, Z)$ , determinare la densità congiunta di  $(U, V)$ .
- Mostrare che  $U$  e  $V - U$  sono variabili aleatorie indipendenti, e determinarne la distribuzione.

**Soluzione.**

- Sia  $1 \leq m < n$ . L'evento  $\{Y = m, Z = n\}$  corrisponde a:

- nei primi  $m - 1$  lanci esce un numero compreso fra 2 e 5;
- nell' $m$ -esimo lancio esce 1;
- nei lanci fra il  $m + 1$ -esimo e l' $m$ -esimo esce un numero compreso fra 1 e 5;
- nell' $n$ -esimo lancio esce 6.

Pertanto

$$p_{Y,Z}(m, n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m-1} \frac{1}{6}.$$

Se  $1 \leq n < m$ , lo stesso argomento scambiando il 6 con l'1 conduce a

$$p_{Y,Z}(m, n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{m-n-1} \frac{1}{6} = p_{Y,Z}(n, m).$$

In tutti gli altri casi  $p_{Y,Z}(m, n) = 0$ .

(b) Poiché  $P(U < V) = 1$ , basta calcolare  $p_{U,V}(m, n)$  per  $1 \leq m < n$ . In questo caso

$$\begin{aligned} p_{U,V}(m, n) &= P(Y = m, Z = n) + P(Y = n, Z = m) = 2p_{Y,Z}(m, n) \\ &= \frac{1}{18} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m-1}. \end{aligned}$$

(c) Siano  $n, m \geq 1$  allora

$$\begin{aligned} P(U = m, V - U = n) &= P(U = m, V = n + m) = \frac{1}{18} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

da cui segue che  $U$  e  $V - U$  sono indipendenti, e  $U \sim Geo(1/3)$ ,  $V - U \sim Geo(1/6)$ .

## 2.2

Sia  $(X_n)_{n \geq 1}$  una successione di variabili aleatorie i.i.d., reali e assolutamente continue con densità

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Si ponga  $Y_n := \frac{n}{\max(X_1, X_2, \dots, X_n)}$

(a) Determinare la funzione di ripartizione  $F_{Y_n}$

(b) Per  $y \in \mathbb{R}$  determinare

$$F(y) := \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(y),$$

e mostrare che  $F$  è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria esponenziale.

(Sugg: è utile l'identità  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$  per ogni  $x > 0$ )

**Soluzione.**

(a) Se  $y = 0$

$$F_{Y_n}(0) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0) = \frac{1}{2^n}.$$

Se  $y > 0$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P\left(\frac{n}{\max(X_1, X_2, \dots, X_n)} < y\right) \\ &= P\left(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > \frac{n}{y}\right) + P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0) \\ &= 1 - [F_{X_1}(n/y)]^n + \frac{1}{2^n} = 1 - \left[\frac{1}{\pi} \arctan(n/y) + \frac{1}{2}\right]^n + \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Se  $y < 0$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P\left(\frac{n}{y} < \max(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0\right) \\ &= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0) - P\left(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) < \frac{n}{y}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} - [P(X_1 < n/y)]^n = \frac{1}{2^n} - \left[\frac{1}{\pi} \arctan(n/y) + \frac{1}{2}\right]^n. \end{aligned}$$

(b) Chiaramente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(y) = 0$$

se  $y \leq 0$ . Per  $y > 0$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= 1 - \left[\frac{1}{\pi} \arctan(n/y) + \frac{1}{2}\right]^n + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \left[1 - \frac{1}{\pi} \arctan(y/n)\right]^n + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \left[1 - \frac{y}{\pi n} + o(1/n)\right]^n + \frac{1}{2^n} \rightarrow 1 - e^{-y/\pi} \end{aligned}$$

se  $n \rightarrow +\infty$ . Dunque  $F(y)$  è la funzione di ripartizione di una  $Exp(1/\pi)$ .

## 2.3

Una ditta produce piattaforme che vengono usate, ad esempio, come palchi temporanei per spettacoli all'aperto. Una tale piattaforma ha una portata massima di  $X$  Kg., dove  $X \sim N(4000, 900)$ , oltre la quale si verificano danni strutturali.  $n$  individui di peso  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  salgono sulla piattaforma. Si assuma che le  $Y_i \sim N(70, 64)$  siano indipendenti tra loro e indipendenti da  $X$ .

- (a) Se  $n = 60$ , qual è la probabilità che si verifichino danni strutturali?
- (b) Qual è il valore massimo di  $n$  affinché la probabilità che si verifichino danni strutturali non superi 0.01? (Si ricordi che  $\Phi^{-1}(0.99) \simeq 2.33$ )

**Soluzione.**

- (a) Si verificano danni strutturali se  $S_{60} := Y_1 + \dots + Y_{60} > X$ . Notare che  $S_{60} - X$  è una normale e

$$\begin{aligned} E(S_{60} - X) &= 60 \cdot 70 - 4000 = 200 \\ Var(S_{60} - X) &= 60 \cdot Var(Y_1) + Var(X) = 4740. \end{aligned}$$

Perciò

$$P(S_{60} - X > 0) = P\left(\frac{S_{60} - X - 200}{\sqrt{4740}} > -\frac{200}{\sqrt{4740}}\right) = \Phi\left(\frac{200}{\sqrt{4740}}\right) \simeq 0.998.$$

- (b) In questo caso  $S_n - X \sim N(70n - 4000, 64n + 900)$ . Per cui

$$P(S_n - X > 0) = P\left(N(0, 1) > \frac{-70n + 4000}{\sqrt{64n + 900}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-70n + 4000}{\sqrt{64n + 900}}\right).$$

Vogliamo quindi:

$$\frac{-70n + 4000}{\sqrt{64n + 900}} \geq \Phi^{-1}(0.99) \simeq 2.33,$$

da cui si trova, risolvendo la precedente disequazione in  $n$ ,  $n \leq 54$ .

## 2.4

A due concorrenti, A e B, viene posta una domanda. Se almeno uno dei due dà la risposta corretta, il gioco termina, e il montepremi va al concorrente che ha risposto correttamente, nel caso sia uno solo, oppure viene diviso fra i due. Se nessuno dei due risponde correttamente, viene posta un'altra domanda, e così via: il gioco termina non appena almeno uno dei due risponde correttamente. Supponiamo che A risponda correttamente ad una domanda con probabilità  $1/3$  e B con probabilità  $1/4$ , indipendentemente fra loro; inoltre la correttezza delle risposte a domande diverse sono indipendenti.

- (a) Qual è la probabilità che il gioco termini alla seconda domanda?
- (b) Se il gioco termina alla seconda domanda, qual è la probabilità che vinca tutto il montepremi il giocatore A?
- (c) Qual è la probabilità che il gioco termini all' $n$ -esima domanda?
- (d) Se il gioco termina all' $n$ -esima domanda, qual è la probabilità che vinca tutto il montepremi il giocatore A?
- (e) Qual è la probabilità che vinca tutto il montepremi il giocatore A?

**Soluzione.** Introduciamo gli eventi  $A_k$  = “il giocatore A risponde correttamente alla  $k$ -esima domanda”,  $B_k$  = “il giocatore B risponde correttamente alla  $k$ -esima domanda”. Sia inoltre  $C_k = A_k \cup B_k$ . Si noti che

$$P(C_k^c) = P(A_k^c \cap B_k^c) = \frac{2}{3} \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

(a)

$$P(C_1^c \cap C_2) = \frac{1}{4}$$

(b)

$$P(A_2 \cap B_2^c | C_1^c \cap C_2) = \frac{P(C_1^c \cap A_2 \cap B_2^c)}{P(C_1^c \cap C_2)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$P(C_1^c \cap \dots \cap C_{n-1}^c \cap C_n) = \frac{1}{2^n}$$

(d)

$$P(A_n \cap B_n^c | C_1^c \cap \dots \cap C_{n-1}^c \cap C_n) = \frac{P(C_1^c \cap \dots \cap C_{n-1}^c \cap A_n \cap B_n^c)}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}.$$

(e)

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} C_1^c \cap \dots \cap C_{n-1}^c \cap A_n \cap B_n^c\right) = \sum_{n \geq 1} P(C_1^c \cap \dots \cap C_{n-1}^c \cap A_n \cap B_n^c) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$