II prova parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ____________
Laurea in Matematica	Nome: ____________
20 Giugno 2013	Matricola: ____________

1 Parte teorica

1.1

Si enunci, e si dimostri, la disuguaglianza di Jensen.

1.2

Sia dia la definizione di variabile aleatoria assolutamente continua.

2 Esercizi

2.1

Sia $\Theta \sim U(0, \pi/2)$, e sia P il punto del piano ottenuto come intersezione della semiretta uscente dall'origine O e che forma un angolo Θ con il semiasse positivo delle x, con la curva γ contenuta nel primo quadrante e di equazione $x^2y = 1$. Sia X l'area compresa fra l'asse delle x, il segmento OP e la curva γ. Determinare la distribuzione di X, e mostrare che X ammette valor medio finito.

Soluzione. Il punto P si trova come intersezione, nel primo quadrante, della retta $y = \tan(\Theta)x$ e $x^2y = 1$, che fornisce

$$P = \left(\tan^{-1/3}(\Theta), \tan^{2/3}(\Theta)\right).$$

L'area X è pertanto somma dell'area del triangolo OPH, dove $H = \left(\tan^{-1/3}(\Theta), 0\right)$, con l'area della superficie compresa fra l'asse delle x, il segmento HP e la curva γ. Pertanto

$$X = \frac{1}{2}\tan^{1/3}(\Theta) + \int_{\tan^{-1/3}(\Theta)}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \frac{3}{2}\tan^{1/3}(\Theta).$$

Perciò, per $x > 0$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{3}{2}\tan^{1/3}(\Theta) \leq x\right) = P\left(\Theta \leq \arctan\left(\frac{8}{27}x^3\right)\right) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{8}{27}x^3\right),$$

mentre $F_X(x) = 0$ per $x \leq 0$. Essendo F_X di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, X è assolutamente continua, con densità

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\frac{8}{9}x^2}{1 + \frac{64}{729}x^6}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x).$$

Il fatto che X ammetta valor medio finito segue dal fatto che $xf_X(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $(0, +\infty)$, essendo $xf_X(x) = O(1/x^3)$ per $x \to +\infty$.

2.2

Sia $\rho \in (0,1)$, e sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, con valor medio $E(X_n) = 0$, e tali che $Var(X_n) = \rho^{2n}$. Si definisca, per induzione, la successione di variabili aleatorie $(Y_n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \rho Y_n + X_{n+1} \\ Y_0 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Si dimostri che $Var(Y_n) = n\rho^{2n}$.

(b) Si dimostri che, per ogni $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| > \epsilon) = 0.$$

(c) Si dimostri la proprietà enunciata in (b) usando la seguente ipotesi, più debole di quella iniziale, sulla varianza di X_n:

$$\lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0.$$

Soluzione.

(a) Si mostra immediatamente per induzione che, per $n \geq 0$

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \rho^{n-k} X_k. \tag{1}$$

Per l'indipendenza delle X_k:

$$Var(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \rho^{2(n-k)} Var(X_k) = n\rho^{2n}.$$

(b) Si noti che da (1) segue che $E(Y_n) = \rho^n$. Per la disuguaglianza di Markov

$$P(|Y_n| > \epsilon) = P(Y_n^2 > \epsilon^2) \leq \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon^2} = \frac{Var(Y_n) + E^2(Y_n)}{\epsilon^2} = \frac{(n+1)\rho^{2n}}{\epsilon^2},$$

da cui si conclude.

(c) Seguendo lo stesso argomento usato in (b), la conclusione segue se mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} Var(Y_n) = 0.$$

Usiamo il fatto che

$$Var(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \rho^{2(n-k)} Var(X_k).$$

Sia $\delta > 0$ fissato ma arbitrario. Per ipotesi, esiste M tale che $Var(X_k) \leq \delta$ per ogni $k > M$. Allora, per n abbastanza grande,

$$\begin{aligned} Var(Y_n) &= \sum_{k=0}^{M} \rho^{2(n-k)} Var(X_k) + \sum_{k=M+1}^{n} \rho^{2(n-k)} Var(X_k) \\ &\leq \rho^{n-M} \sum_{k=0}^{M} Var(X_k) + \delta \sum_{k=M+1}^{n} \rho^{2(n-k)} \\ &\leq \rho^{n-M} \sum_{k=0}^{M} Var(X_k) + \delta \sum_{i=0}^{+\infty} \rho^i \leq \rho^{n-M} \sum_{k=0}^{M} Var(X_k) + \frac{\delta}{1-\rho}. \end{aligned}$$

Si ha perciò che

$$\limsup_n Var(Y_n) \leq \frac{\delta}{1-\rho},$$

e per l'arbitrarietà di δ si conclude che

$$\lim_{N\to+\infty} Var(Y_n) = 0.$$

2.3

Il cambio dei pneumatici di un'auto consiste di due operazioni. La prima, la rimozione dei pneumatici vecchi, richiede un tempo di lavoro S, dove S è una variabile aleatoria esponenziale con $E(S) = 0.15$ (in ore). La seconda, l'installazione dei nuovi pneumatici, richiede un tempo di lavoro T, dove T è una variabile aleatoria esponenziale con $E(T) = 0.35$. Inoltre $Cov(S,T) = 0.01$. Un gommista ha due giorni (16 ore di lavoro) per cambiare i pneumatici a 30 auto. Qual è la probabilità che ci riesca? Sugg.: usare l'approssimazione normale.

Soluzione. Siano S_i e T_i i tempi di lavoro riferiti all'i-ma auto. Si noti che, essendo S_i e T_i variabili aleatorie esponenziali,

$$Var(S_i) = E^2(S_i) = 0.0225, \; Var(T_i) = E^2(T_i) = 0.1225.$$

Inoltre, posto $X_i = S_i + T_i$

$$Var(X_i) = Var(S_i) + Var(T_i) + 2Cov(S_i,T_i) = 0.165.$$

Infine $E(X_i) = E(S_i) + E(T_i) = 1/2$. Assumendo l'indipendenza delle S_i e usando l'approssimazione normale

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 16\right) = P\left(\overline{X}_{30} \leq \frac{16}{30}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\frac{16}{30}-\frac{1}{2}}{\sqrt{0.165}}\sqrt{30}\right) \simeq \Phi(0.45) \simeq 0.6736$$