

Capitolo 1

1.1 Parte I

Exercise 1.1. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e siano $A, B \subseteq \Omega$ eventi.

(1) Si mostri che se $P(A) = P(B) = 0$ allora $P(A \cup B) = 0$.

(2) Si mostri che se $P(A) = P(B) = 1$ allora $P(A \cap B) = 1$.

Solution 1.1. (1) Poiché ogni probabilità è sub-additiva,

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) = 0.$$

(2) Per il punto precedente, $P(A^c \cup B^c) = 0$. Ma, essendo $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, si ha

$$P(A \cap B) = 1 - P(A^c \cup B^c) = 1.$$

Exercise 1.2. Rafforziamo l'esercizio precedente. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia *numerabile* di eventi.

(1) Si mostri che se $P(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$.

(2) Si mostri che se $P(A_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$.

Solution 1.2. Si argomenta in modo analogo all'esercizio precedente, osservando che, per sub-additività,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = 0,$$

e che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c$$

Exercise 1.3. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $C \subseteq \Omega$ un evento.

(1) Si mostri che, se $P(C) = 1$, allora $P(A \cap C) = P(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.

(2) Si mostri che, se $P(C) = 0$, allora $P(A \cup C) = P(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.

Solution 1.3. (1) Basta osservare che

$$P(A) - P(A \cap C) = P(A \cap C^c) = 0$$

essendo $A \cap C^c \subseteq C^c$ e $P(C^c) = 0$.

(2)

$$P(A \cup C) - P(A) = P(C \cap A^c) = 0$$

essendo $C \cap A^c \subseteq C$ e $P(C) = 0$.

Exercise 1.4 (Disuguaglianza di Bonferroni). Siano $A_1, \dots, A_n$ eventi di uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) . Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

In particolare, se $P(A_i \cap A_j) = 0$ per $i \neq j$, si deduca che $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

Solution 1.4. Se $n = 1$ la disuguaglianza da dimostrare si riduce a

$$P(A_1) \geq P(A_1),$$

banalmente vera. Assumiamo la disuguaglianza vera per n . Ricordando l'identità $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right).$$

Ora, per il termine $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$ usiamo l'ipotesi induttiva:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

mentre per il termine $P\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right)$ usiamo la sub-additività

$$P\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k \cap A_{n+1}).$$

Mettendo tutto assieme otteniamo

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^n P(A_k \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j).
\end{aligned}$$

Exercise 1.5. Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Si mostri che per ogni $A \subset \Omega_1$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

Solution 1.5. È ovvio una volta osservato che

$$|A \times \Omega_2| = |A| |\Omega_2|.$$

Exercise 1.6. Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Si calcoli la probabilità che:

- (1) nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);
- (2) nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Solution 1.6. Sia S l'insieme delle 52 carte, $\Omega := \{A \subseteq S : |A| = 5\}$, P la probabilità uniforme sui sottoinsiemi di Ω .

- (1) Sia E = “nelle cinque carte estratte non c'è nessuna coppia”. La scelta di un elemento di E^c può essere eseguita in due passi:
 1. Si scelgono 5 numeri o figure *distinti*; questo può essere fatto in $\binom{13}{5}$ modi diversi.
 2. Una volta eseguita la scelta in 1., si tratta di scegliere per ognuno dei 5 numeri o figure uno dei 4 rappresentanti; questo comporta 4^5 scelte distinte. Abbiamo quindi visto che $|E^c| = 4^5 \binom{13}{5}$. Pertanto

$$P(E) = 1 - \frac{4^5 \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,492917167.$$

- (2) Sia F l'evento in questione. La scelta di un elemento di F si può eseguire in tre passi:
 1. si sceglie il numero o figura per la coppia (13 scelte);
 2. fissata la scelta in 1. si scelgono le due carte per la coppia ($\binom{4}{2}$ scelte);
 3. fissate le scelte in 1. e 2. si scelgono 3 carte con numeri o figure distinti e diversi da quello usato per la coppia. Il numero di scelte si determina come al punto a., ma con 48 carte invece di 52 e 3 carte scelte invece di 5 ($4^3 \binom{12}{3}$ scelte).

Quindi

$$P(F) = \frac{13 \binom{4}{2} 4^3 \binom{12}{3}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,422569028.$$

Exercise 1.7. Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

- (1) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)
- (2) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?

Solution 1.7. (1) Sia

$$\Omega := \{(A_1, A_2, A_3) : A_i \subseteq \{1, 2, \dots, 30\}, |A_i| = 10, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j\},$$

e P la probabilità uniforme su Ω . Si noti che Ω è formato da *terne ordinate* di sottoinsiemi che formano una partizione. Non sarebbe affatto sbagliato considerare terne non ordinate. Non è restrittivo assumere che Giacomo, Claudio e Nicola corrispondano rispettivamente agli elementi 1, 2 e 3 di $\{1, 2, \dots, 30\}$. Un elemento di Ω si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo A_1 : $\binom{30}{10}$ scelte.
- Scelgo A_2 da $\{1, 2, \dots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{20}{10}$ scelte.

Ovviamente A_3 resta determinato. Quindi

$$|\Omega| = \binom{30}{10} \binom{20}{10}.$$

Sia B = “Giacomo, Claudio e Nicola finiscono in tre gruppi distinti”. Un elemento di B si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo 9 elementi per A_1 in $\{4, 5, \dots, 30\}$: $\binom{27}{9}$ scelte.
- Scelgo 9 elementi per A_2 in $\{4, 5, \dots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{18}{9}$ scelte.
- Scelgo come disporre 1, 2 e 3 nei tre posti vuoti: $3! = 6$ scelte.

Dunque:

$$|B| = 6 \binom{27}{9} \binom{18}{9} \Rightarrow P(B) = \frac{6 \binom{27}{9} \binom{18}{9}}{\binom{30}{10} \binom{20}{10}}.$$

- (2) Sia C = “Giacomo, Claudio e Nicola finiscono nello stesso gruppo”. Un elemento di C si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo il gruppo in cui inserire 1, 2 e 3: 3 scelte.
- Scelgo i rimanenti componenti di quel gruppo: $\binom{27}{7}$.
- Scelgo i componenti di uno (qualsiasi) degli altri due gruppi: $\binom{20}{10}$ scelte.

Dunque

$$P(C) = \frac{3 \binom{27}{7} \binom{20}{10}}{\binom{30}{10} \binom{20}{10}} = \frac{3 \binom{27}{7}}{\binom{30}{10}}.$$

Exercise 1.8. Siano A, B eventi. Ricordando che $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, si mostri che

$$P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Siano ora A, B, C tre eventi. Si mostri che

$$P(A \triangle C) \leq P(A \triangle B) + P(B \triangle C).$$

Solution 1.8. Per la prima parte, si noti che

$$A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B),$$

e quest'ultima è un'unione disgiunta. Perciò

$$P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(A \cap B),$$

e si conclude usando la formula per $P(A \cup B)$.

Per la seconda parte, si mostra che

$$A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C),$$

da cui la disuguaglianza segue per subadditività.

Exercise 1.9. Siano A e B due eventi arbitrari di uno spazio di probabilità (Ω, P) . Si dimostri la disuguaglianza

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Si mostri quindi per induzione che, per ogni $n \geq 2$ e per ogni scelta degli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$, si ha

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1).$$

Solution 1.9. Per il caso $n = 2$, basta osservare che

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Per $n > 2$,

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n] \\
&\geq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) + P(A_n) - 1 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1),
\end{aligned}$$

dove abbiamo prima usato il risultato per $n = 2$ e poi l'ipotesi induttiva.

Exercise 1.10. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, a caso, tre carte. Si calcoli la probabilità che:

- (1) tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
- (2) le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
- (3) almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Solution 1.10. (1) Ω è l'insieme dei sottoinsiemi di tre elementi del mazzo di 52 carte, quindi $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Il numero di modi di scegliere 3 carte in modo che non vi sia alcun asso è $\binom{48}{3}$. Quindi, la probabilità richiesta è

$$1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

- (2) Sia A l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità. Scegliere un elemento di A significa i) scegliere 3 dei 4 colori disponibili ($\binom{4}{3}$ scelte) ii) una volta scelti i colori, ognuna delle 3 carte può essere scelta in 13 modi possibili. Dunque

$$|A| = \binom{4}{3} 13^3$$

che, divisa per $|\Omega|$, dà la probabilità richiesta.

- (3) Se B è l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità, B^c = le tre carte scelte hanno numero diverso. Scegliere un elemento di B^c significa scegliere i) tre numeri tra i 13 disponibili ($\binom{13}{3}$ scelte) ii) fissati i tre numeri ogni carta può essere scelta in 4 modi diversi. Dunque

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{13}{3} 4^3}{\binom{52}{3}}.$$

Exercise 1.11. Un mazzo di 52 carte da Poker viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Solution 1.11. Ci sono $\binom{52}{26}$ modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte, se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual

numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una parte in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. In definitiva:

$$P(\text{ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero}) = \frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.218126.$$

Exercise 1.12. Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Solution 1.12. Possiamo scegliere Ω = insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti. Se A è l'evento in questione, A^c è l'insieme dei sottoinsiemi di r elementi degli $n - m$ biglietti non vincenti. Allora

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}}.$$

1.2 Parte II

Exercise 1.13. Si mescolano n paia di guanti, che vengono poi distribuiti a caso a n persone, due guanti per ciascuno. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Exercise 1.14. Si esegua una permutazione casuale dei numeri $\{1, 2, \dots, n\}$. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Exercise 1.15. Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \dots, n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, diciamo che l'insieme I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con $A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Indicando con P la probabilità uniforme su S_n , si calcoli $P(A_I)$.

Exercise 1.16. Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Si determini la probabilità p_n che gli n oggetti estratti siano tutti diversi. Usando la formula di Stirling, si determini quindi il comportamento asintotico di p_n per $n \rightarrow +\infty$, mostrando che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n / (c\rho^n) = 1$) e calcolando i valori di c e ρ .

Exercise 1.17. Due accanite giocatrici, Silvia e Beatrice, lanciano $2n$ volte una moneta. Quando esce testa Silvia vince un Euro, altrimenti è Beatrice a vincere un Euro. Qual è la probabilità che alla fine del gioco Silvia e Beatrice abbiano vinto la stessa cifra?