Capitolo 1

1.1 Parte I

Exercise 1.1. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e siano $A, B \subseteq \Omega$ eventi.

(1) Si mostri che se $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 0$ allora $\mathrm{P}(A \cup B) = 0$.
(2) Si mostri che se $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1$ allora $\mathrm{P}(A \cap B) = 1$.

Exercise 1.2. Rafforziamo l'esercizio precedente. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia *numerabile* di eventi.

(1) Si mostri che se $\mathrm{P}(A_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathrm{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$.
(2) Si mostri che se $\mathrm{P}(A_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathrm{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$.

Exercise 1.3. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto e sia $C \subseteq \Omega$ un evento.

(1) Si mostri che, se $\mathrm{P}(C) = 1$, allora $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.
(2) Si mostri che, se $\mathrm{P}(C) = 0$, allora $\mathrm{P}(A \cup C) = \mathrm{P}(A)$ per ogni $A \subseteq \Omega$.

Exercise 1.4 (Disuguaglianza di Bonferroni). Siano $A_1, \dots, A_n$ eventi di uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si mostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j).$$

In particolare, se $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = 0$ per $i \neq j$, si deduca che $\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)$.

Exercise 1.5. Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Si mostri che per ogni $A \subset \Omega_1$

$$\mathrm{P}_1(A) = \mathrm{P}(A \times \Omega_2).$$

Exercise 1.6. Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Si calcoli la probabilità che:

(1) nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);

(2) nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Exercise 1.7. Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

(1) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)

(2) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?

Exercise 1.8. Siano A, B eventi. Ricordando che $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, si mostri che
$$\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\,\mathrm{P}(A \cap B).$$
Siano ora A, B, C tre eventi. Si mostri che
$$\mathrm{P}(A \triangle C) \leq \mathrm{P}(A \triangle B) + \mathrm{P}(B \triangle C).$$

Exercise 1.9. Siano A e B due eventi arbitrari di uno spazio di probabilità (Ω, P). Si dimostri la disuguaglianza
$$\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1.$$
Si mostri quindi per induzione che, per ogni $n \geq 2$ e per ogni scelta degli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, si ha
$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - (n-1).$$

Exercise 1.10. Da un mazzo di 52 carte da Poker si estraggono, a caso, tre carte. Si calcoli la probabilità che:

(1) tra le carte estratte vi sia almeno un asso;

(2) le tre carte estratte siano di tre semi diversi;

(3) almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Exercise 1.11. Un mazzo di 52 carte da Poker viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Exercise 1.12. Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?