Capitolo 1

1.1 Parte II

Exercise 1.1. Si mescolano n paia di guanti, che vengono poi distribuiti a caso a n persone, due guanti per ciascuno. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Solution 1.1. Numeriamo i guanti da 1 a $2n$ (da 1 a n i guanti destri), e le persole da 1 a n. Se $\sigma \in S_{2n}$, la sequenza $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(2n))$ rappresenta l'ordine in cui i guanti vengono distribuiti, con la convenzione che $\sigma(2k-1), \sigma(2k)$ siano i guanti consegnati alla persona k. Denotiamo con P la probabilità uniforme su S_{2n}, e A l'evento che ognuno riceva un guanto destro e uno sinistro. Scegliamo un elemento di A tramite uno schema di scelte successive, scegliendo successuamente le coppie ordinate $(\sigma(2k-1), \sigma(2k))$, per $k = 1, 2, \ldots, n$. La prima coppia $(\sigma(1), \sigma(2))$ può essere scelta in $2n^2$ modi diversi: scegliendo prima un guanto destro (n modi) e poi uno sinistro (n modi), oppure viceversa. Similmente, il numero di scelte restanti per la coppia $(\sigma(2k-1), \sigma(2k))$ è $2(n-k+1)^2$. Ne segue che

$$|A| = 2^n (n!)^2,$$

e quindi

$$P(A) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Exercise 1.2. Si esegua una permutazione casuale dei numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Solution 1.2. Sia Ω l'insieme delle permutazioni degli n numeri. Per le permutazioni σ dell'evento A in questione, vi sono $n-1$ modi diversi di scegliere $\sigma(1)$, che determina anche il valore di $\sigma(2)$, mentre gli altri $\sigma(i)$, $i > 2$ si possono sciegliere a piacere in $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$, il che si può fare in $(n-2)!$ modi diversi. Dunque

$$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Exercise 1.3. Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1,2,\ldots,n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, diciamo che l'insieme I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con $A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Indicando con P la probabilità uniforme su S_n, si calcoli $\mathrm{P}(A_I)$.

Solution 1.3. Si osservi che I è stabile per σ se e solo se σ è dato dalla composizione di una permutazione di I con una permutazione di I^c. Quindi $|A_I| = |I|!(n-|I|)!$, da cui

$$P(A_I) = \frac{|I|!(n-|I|)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{|I|}}.$$

Exercise 1.4. Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Si determini la probabilità p_n che gli n oggetti estratti siano tutti diversi. Usando la formula di Stirling (**??**), si determini quindi il comportamento asintotico di p_n per $n \to +\infty$, mostrando che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_{n\to\infty} p_n/(c\rho^n) = 1$) e calcolando i valori di c e ρ.

Solution 1.4. Il numero di sequenze di n estrazioni in cui gli oggetti estratti siano tutti diversi è

$$2n(2n-1)\cdots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Perciò

$$p_n = \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}.$$

Usando la Formula di Stirling

$$p_n = \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}e^{\theta(2n)/12n}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta(n)/12n}(2n)^n} \sim \sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^n,$$

cioè $c = \sqrt{2}$ e $\rho = 2/e$.

Exercise 1.5. Due accanite giocatrici, Silvia e Beatrice, lanciano $2n$ volte una moneta. Quando esce testa Silvia vince un Euro, altrimenti è Beatrice a vincere un Euro. Qual è la probabilità che alla fine del gioco Silvia e Beatrice abbiano vinto la stessa cifra?

Solution 1.5. L'evento in questione avviene se e solo se in $2n$ lanci ottengo n esattamente n teste, il che avviene con probabilità

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}.$$