# Capitolo 1

## 1.1 Parte III

**Exercise 1.1.** Si mostri, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A)$ e $\mathrm{P}(A|B) < \mathrm{P}(A)$ sono possibili.

**Solution 1.1.** Si consideri un qualsiasi spazio di probabilità $(\Omega, \mathrm{P})$ in cui vi sia un evento $B$ per cui $\mathrm{P}(B) \in (0,1)$. Posto $A = B$, si ha

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|B) = 1 > \mathrm{P}(A),$$

mentre, posto $A = B^c$, si ha

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B^c|B) = 0 < \mathrm{P}(A).$$

**Exercise 1.2.** Siano assegnati tre numeri: $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ e $\beta \in (0,1)$. Si mostri che esiste uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathrm{P})$ contenente due eventi $A, B$ tali che

$$\mathrm{P}(B) = \beta\,, \qquad \mathrm{P}(A|B) = \alpha_1\,, \qquad \mathrm{P}(A|B^c) = \alpha_2\,.$$

[*Sugg.* Si consideri $\Omega = \{ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b}\} = \{a, \bar{a}\} \times \{b, \bar{b}\}$, definendo $A := \{ab, a\bar{b}\}$, $B := \{ab, \bar{a}b\}$ e mostrando che esiste un'unica probabilità P su $\Omega$ che soddisfa le specifiche richieste.]

**Solution 1.2.** Basta definire la densità discreta $\mathrm{p}(\omega) := \mathrm{P}(\{\omega\})$. Se devono valere le relazioni

$$\mathrm{P}(B) = \beta\,, \qquad \mathrm{P}(A|B) = \alpha_1\,, \qquad \mathrm{P}(A|B^c) = \alpha_2\,, \tag{1.1}$$

si deve avere necessariamente

$$\mathrm{p}(ab) = \mathrm{P}(\{ab\}) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A|B) = \beta\,\alpha_1\,.$$

Con analoghi calcoli, si ricavano tutti i valori di p:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(ab) &= \alpha_1 \beta\,, & \mathrm{p}(a\bar{b}) &= \alpha_2(1-\beta)\,, \\ \mathrm{p}(\bar{a}b) &= (1-\alpha_1)\beta\,, & \mathrm{p}(\bar{a}\bar{b}) &= (1-\alpha_2)(1-\beta)\,. \end{aligned}$$

Dunque la densità discreta p è univocamente determinata dalle richieste del problema (1.1). Viceversa, è immediato verificare che la funzione p *definita* come sopra è effettivamente una densità discreta, ossia $\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{p}(\omega) = 1$, e valgono le proprietà richieste (1.1).

**Exercise 1.3 (Paradosso dei tre prigionieri).** Tre prigionieri (A, B, C) sono condannati all'impiccagione. Il sovrano decide di graziare uno dei tre scelto a caso, ma il nome del fortunato verrà comunicato soltanto alla vigilia dell'esecuzione. Il prigioniero A si avvicina al secondino, che conosce il nome del graziato, e gli dice: "Per favore, comunicami un nome, tra B e C, che verrà sicuramente impiccato. È noto che almeno uno di loro due sarà impiccato, pertanto non mi fornisci alcuna informazione dicendomelo". Il secondino ci pensa, trova l'argomento sensato e risponde: "B verrà impiccato". A questo punto A esclama: "Evviva! Visto che B verrà impiccato, restiamo in gioco solo io e C, pertanto ho il 50% di probabilità di essere graziato, mentre in precedenza ne avevo solo $\frac{1}{3}$." Questo argomento è corretto?

**Solution 1.3.** Come nel paradosso di Monty-Hall è importante specificare in che modo il secondino sceglie il nome da comunicare ad A. L'opzione più naturale è che il secondino comunica B con probabilità 1 se il graziato è C, e con probabilità $\frac{1}{2}$ se il graziato è A. Se allora consideriamo gli eventi $E_x$ = "$x$ viene graziato", per $x \in \{\mathrm{A,B,C}\}$, e $F$ = "il secondino comunica che B verrà impiccato", abbiamo

$$\mathrm{P}(E_A) = \mathrm{P}(E_B) = \mathrm{P}(E_C) = \frac{1}{3},$$

e

$$\mathrm{P}(F|E_A) = \frac{1}{2}, \mathrm{P}(F|E_B) = 0, \mathrm{P}(F|E_C) = 1.$$

Pertanto

$$\mathrm{P}(E_A|F) = \frac{\mathrm{P}(F|E_A)\,\mathrm{P}(E_A)}{\mathrm{P}(F|E_A)\,\mathrm{P}(E_A) + \mathrm{P}(F|E_B)\,\mathrm{P}(E_B) + \mathrm{P}(F|E_C)\,\mathrm{P}(E_C)} = \frac{1}{3}.$$

L'argomento di A è sbagliato.

**Exercise 1.4 (Paradosso delle tre carte).** Infilo in una busta tre carte: una ha entrambe le facce rosse, una le ha entrambe nere, una ha una faccia rossa e una nera. Con gli occhi chiusi, pesco una carta a caso e la depongo sul tavolo su una faccia a caso, quindi apro gli occhi. Se la faccia che vedo è rossa, qual è la probabilità che anche l'altra faccia sia rossa?

**Solution 1.4.** Consideriamo gli eventi: $NN$ = "la carta pescata è quella con due facce nere", $RR$ = "la carta pescata è quella con due facce rosse", $NR$ = "la carta pescata è quella con una faccia rossa e una nera", $R$ = "la faccia che vedo è rossa". Si ha:

$$\mathrm{P}(NN) = \mathrm{P}(RR) = \mathrm{P}(NR) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(R|NN) = 0, \mathrm{P}(R|RR) = 1, \mathrm{P}(R|NR) = \frac{1}{2}.$$

Quindi, la probabilità cercata è

$$\mathrm{P}(RR|R) = \frac{\mathrm{P}(R|RR)\,\mathrm{P}(RR)}{\mathrm{P}(R|RR)\,\mathrm{P}(RR) = \mathrm{P}(R|NN)\,\mathrm{P}(NN) + \mathrm{P}(R|NR)\,\mathrm{P}(NR)} = \frac{2}{3}.$$

**Exercise 1.5.** Si mostri la seguente *formula di disintegrazione per la probabilità condizionale*: dati tre eventi $A, B, C$ tali che $\mathrm{P}(B \cap C) > 0$ e $\mathrm{P}(B \cap C^c) > 0$, si ha

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B \cap C)\,\mathrm{P}(C|B) + \mathrm{P}(A|B \cap C^c)\,\mathrm{P}(C^c|B).$$

**Solution 1.5.** Osservando che

$$\mathrm{P}(A|B \cap C)\,\mathrm{P}(C|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B \cap C)}{\mathrm{P}(B)},$$

moltiplicando l'identità da dimostrare per $\mathrm{P}(B)$, si mostra che è equivalente a

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \cap B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C^c)$$

che è vera per additività della probabilità.

**Exercise 1.6.** Una compagnia di assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria $C$ a fronte di un danno subito dal cliente. La compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: "basso rischio", "medio rischio" e "alto rischio". Dei suoi assicurati, il 75% sono a "basso rischio", il 20% a "medio rischio" e il restante 5% ad "alto rischio".

È noto che gli assicurati a "basso rischio" hanno una probabilità del 2% di subire un danno che prevede il pagamento dell'assicurazione, mentre tale probabilità è del 10% per gli assicurati a "medio rischio" e del 20% per quelli ad "alto rischio".

(1) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell'assicurazione?
(2) Se un individuo reclama il pagamento dell'assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad "alto rischio"?

**Solution 1.6.** i) Consideriamo gli eventi: $A_1$ = "l'individuo scelto è della categoria "basso rischio"; $A_2$ = "l'individuo scelto è della categoria "medio rischio"; $A_3$ = "l'individuo scelto è della categoria "alto rischio"; $B$ = "l'individuo reclama il pagamento dell'assicurazione". Sappiamo che

$$\mathrm{P}(B|A_1) = 0.02 \quad \mathrm{P}(B|A_2) = 0.1 \quad \mathrm{P}(B|A_3) = 0.2$$

$$\mathrm{P}(A_1) = 0.75 \quad \mathrm{P}(A_2) = 0.2 \quad \mathrm{P}(A_3) = 0.05.$$

Per la formula delle probabilità totali

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)\,P(A_i) = 0.02 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.045.$$

ii) Usando la Formula di Bayes,

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)\,P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.045} = \frac{2}{9}.$$

**Exercise 1.7.** Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l'altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell'incidente era giallo. Sappiamo che i taxi bianchi sono l'85% dei taxi in città. Inoltre, la probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore del taxi è pari a 0.8.

(i) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

(ii) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell'identificazione del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella del primo. Sulla base di questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

**Solution 1.7.** (i) Consideriamo gli eventi: $A =$ "il taxi coinvolto è bianco", $B =$ "il testimone dichiara di aver visto un taxi giallo". Sappiamo che $P(A) = 0.85$, $P(B|A) = 0.2$, $P(B|A^c) = 0.8$. Perciò

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c)} = \frac{17}{29}.$$

(ii) Sia $C =$ "il secondo testimone dichiara di aver visto un taxi giallo". Per ipotesi $P(B \cap C|A) = (0.2)^2 = 0.04$, e $P(B \cap C|A^c) = (0.8)^2 = 0.64$. Allora

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(B \cap C|A)\,P(A)}{P(B \cap C|A)\,P(A) + P(B \cap C|A^c)\,P(A^c)} = \frac{17}{65}.$$

**Exercise 1.8.** Il Ministero della Pubblica Istruzione vuole stimare la frazione $\alpha \in (0,1)$ di studenti di terza media che hanno preparazione scarsa in matematica. A tal fine, sottopone a un grande numero di studenti un quesito con 10 possibili risposte, di cui una sola è corretta. Assumiamo che gli studenti con una buona preparazione in matematica rispondano correttamente al quesito, mentre quelli con preparazione scarsa diano una risposta scelta a caso (e non esistano altre possibilità). Sottoponendo ad una analisi più approfondita gli studenti che hanno risposto correttamente al quesito, si scopre che tra questi solo l'80% ha una buona preparazione in matematica. Sulla base di queste informazioni, si determini $\alpha$.

**Solution 1.8.** Immaginiamo di scegliere uno studente a caso e consideriamo gli eventi $A :=$ "lo studente ha una preparazione scarsa in matematica" e $B :=$ "lo studente risponde correttamente al quesito". Secondo i dati forniti dal problema

$$\mathrm{P}(A)=\alpha, \qquad \mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{10}, \qquad \mathrm{P}(B|A^c)=1, \qquad \mathrm{P}(A^c|B)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}.$$

Si ricava quindi

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B|A^c)\,\mathrm{P}(A^c)=\frac{\alpha}{10}+(1-\alpha)=1-\frac{9}{10}\alpha,$$

da cui

$$\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{\mathrm{P}(A^c|B)\,\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A^c)}=\frac{\frac{4}{5}(1-\frac{9}{10}\alpha)}{1-\alpha}=\frac{\frac{4}{5}-\frac{18}{25}\alpha}{1-\alpha},$$

e dato che $\mathrm{P}(B|A^c)=1$ si ottiene infine

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{18}{25}\alpha}{1-\alpha}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha=\frac{5}{7}\simeq 71,4\%.$$

**Exercise 1.9.** Tre urne, etichettate con le lettere $\alpha,\beta,\gamma$, contengono 10 palline ciascuna. Due urne contengono 5 palline rosse e 5 blu, mentre la terza contiene 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale sia l'urna con 3 palline rosse: in assenza di ulteriori informazioni, riteniamo che sia $\alpha,\beta$ o $\gamma$ con la stessa probabilità.

Estraiamo ora 2 palline da ognuna delle tre urne. Se dall'urna $\alpha$ abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall'urna $\beta$ due palline rosse e dall'urna $\gamma$ due palline blu, qual è la probabilità che l'urna $\gamma$ sia quella contenente tre palline rosse?

**Solution 1.9.** Per $x\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$, si $A_x$ l'evento "l'urna con 3 palline rosse è l'urna $x$". Sia inoltre $B$ l'evento "dall'urna $\alpha$ abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall'urna $\beta$ due palline rosse e dall'urna $\gamma$ due palline blu". Abbiamo

$$\mathrm{P}(B|A_\alpha)=\frac{3\cdot 7}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{84}{3645}.$$

$$\mathrm{P}(B|A_\beta)=\frac{5\cdot 5}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2}{243}.$$

$$\mathrm{P}(B|A_\gamma)=\frac{5\cdot 5}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{14}{243}.$$

$$\mathrm{P}(A_x)=\frac{1}{3}$$

per $x\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$. In conclusione

$$\mathrm{P}(A_\gamma|B)=\frac{\mathrm{P}(B|A_\gamma)\,\mathrm{P}(A_\gamma)}{\sum_{x\in\{\alpha,\beta,\gamma\}}\mathrm{P}(B|A_x)P(A_x)}=\frac{35}{54}.$$

**Exercise 1.10.** Un'urna contiene $M$ palline, di cui $M_1$ bianche.

(1) Si effettuano $n$ estrazioni successive, *con* reimmissione. Si considerino gli eventi

$$B_j := \text{“la } j\text{-esima pallina estratta è bianca”},$$
$$A_m := \text{“delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche”},$$

dove $j,m \leq n$. Si calcoli $\mathrm{P}(B_j|A_m)$.

(2) Si calcoli la probabilità condizionale del punto precedente nel caso di estrazioni *senza* reimmissione, supponendo che $m$ sia tale che $\mathrm{P}(A_m) > 0$.

**Solution 1.10.** Al solo scopo di semplificare la soluzione (ma si potrebbe fare altrimenti) consideriamo la seguente osservazione, valida sia per il punto a. che per il punto b. . Se si considera, nell'insieme $\Omega$ delle sequenze possibili di palline estratte, la funzione che scambia la prima pallina estratta con la $j$-esima, tale funzione è una corrispondenza biunivoca in $\Omega$ che manda $A_m$ in sé e $B_j$ in $B_1$, e quindi $B_j \cap A_m$ in $B_1 \cap A_m$. Poichè, sia in a. che in b., la probabilità su $\Omega$ è quella uniforme, tale trasformazione non cambia la probabilità degli eventi. In particolare $\mathrm{P}(B_j \cap A_m) = P(B_1 \cap A_m)$. Non 'e dunque restrittivo assumere $j = 1$.

(1) Trattandosi di estrazioni con reimmissione, scegliamo come spazio campionario

$$\Omega = \{1,2,\dots,M\}^n,$$

e sia P la probabilità uniforme su esso. Si vede che $B_1 \cap A_m = B_1 \cap A'_m$ dove $A'_m =$ nelle successive $n-1$ estrazioni si estraggono $m-1$ palline bianche. Gli elementi di $B_1 \cap A'_m$ sono individuati dalle seguenti scelte successive:

- Si sceglie la pallina bianca per la prima estrazione.
- Si scelgono altre $m-1$ estrazioni in cui estrarre palline bianche.
- Per ognuna delle estrazioni scelte al punto precedente si sceglie la pallina bianca da estrarre.
- Per ognuna delle rimanenti $n-m$ estrazioni si sceglie una pallina “non bianca” da estrarre.

Si deduce che

$$|B_1 \cap A_m| = M_1 \binom{n-1}{m-1} M_1^{m-1} (M - M_1)^{n-m}.$$

Perciò

$$\mathrm{P}(B_1 \cap A_m) = \frac{|B_1 \cap A_m|}{M^n} = fracM_1M \binom{n-1}{m-1} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{M_1}{M}\right)^{n-m}.$$

Dato che

$$\mathrm{P}(A_m) = \binom{n}{m} \left(\frac{M_1}{M}\right)^{m} \left(1 - \frac{M_1}{M}\right)^{n-m},$$

si trova facilmente

$$\mathrm{P}(B_1|A_m) = \frac{\mathrm{P}(B_1 \cap A_m)}{\mathrm{P}(A_m)} = \frac{m}{n}.$$

(2) Si noti che $\mathrm{P}(A_m|B_1)$ coincide con la probabilità che da un'urna contenente $M-1$ palline di cui $M_1-1$ bianche si estraggano (senza reintroduzione) $m-1$ palline bianche in $n-1$ estrazioni. Perciò

$$\mathrm{P}(A_m|B_1) = \frac{\binom{M_1-1}{m-1}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M-1}{n-1}}.$$

Essendo

$$\mathrm{P}(A_m) = \frac{\binom{M_1}{m}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M}{n}}$$

e

$$\mathrm{P}(B_1) = \frac{M_1}{M},$$

con facili calcoli si ha

$$\mathrm{P}(B_1|A_m) = \frac{\mathrm{P}(A_m|B_1)\,\mathrm{P}(B_1)}{P(A_m)} = \frac{m}{n},$$

cioè lo stesso risultato ottenuto nel caso di estrazioni con reimmissione.