Capitolo 1

1.1 Parte III

Exercise 1.1. Si mostri, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A)$ e $\mathrm{P}(A|B) < \mathrm{P}(A)$ sono possibili.

Exercise 1.2. Siano assegnati tre numeri: $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ e $\beta \in (0,1)$. Si mostri che esiste uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) contenente due eventi A, B tali che

$$\mathrm{P}(B) = \beta\,, \qquad \mathrm{P}(A|B) = \alpha_1\,, \qquad \mathrm{P}(A|B^c) = \alpha_2\,.$$

[*Sugg.* Si consideri $\Omega = \{ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b}\} = \{a, \bar{a}\} \times \{b, \bar{b}\}$, definendo $A := \{ab, a\bar{b}\}$, $B := \{ab, \bar{a}b\}$ e mostrando che esiste un'unica probabilità P su Ω che soddisfa le specifiche richieste.]

Exercise 1.3 (Paradosso dei tre prigionieri). Tre prigionieri (A, B, C) sono condannati all'impiccagione. Il sovrano decide di graziare uno dei tre scelto a caso, ma il nome del fortunato verrà comunicato soltanto alla vigilia dell'esecuzione. Il prigioniero A si avvicina al secondino, che conosce il nome del graziato, e gli dice: "Per favore, comunicami un nome, tra B e C, che verrà sicuramente impiccato. È noto che almeno uno di loro due sarà impiccato, pertanto non mi fornisci alcuna informazione dicendomelo". Il secondino ci pensa, trova l'argomento sensato e risponde: "B verrà impiccato". A questo punto A esclama: "Evviva! Visto che B verrà impiccato, restiamo in gioco solo io e C, pertanto ho il 50% di probabilità di essere graziato, mentre in precedenza ne avevo solo $\frac{1}{3}$." Questo argomento è corretto?

Exercise 1.4 (Paradosso delle tre carte). Infilo in una busta tre carte: una ha entrambe le facce rosse, una le ha entrambe nere, una ha una faccia rossa e una nera. Con gli occhi chiusi, pesco una carta a caso e la depongo sul tavolo su una faccia a caso, quindi apro gli occhi. Se la faccia che vedo è rossa, qual è la probabilità che anche l'altra faccia sia rossa?

Exercise 1.5. Si mostri la seguente *formula di disintegrazione per la probabilità condizionale*: dati tre eventi A, B, C tali che $\mathrm{P}(B \cap C) > 0$ e $\mathrm{P}(B \cap C^c) > 0$, si ha

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B \cap C)\,\mathrm{P}(C|B) + \mathrm{P}(A|B \cap C^c)\,\mathrm{P}(C^c|B).$$

Exercise 1.6. Una compagnia di assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: “basso rischio”, “medio rischio” e “alto rischio”. Dei suoi assicurati, il 75% sono a “basso rischio”, il 20% a “medio rischio” e il restante 5% ad “alto rischio”.

È noto che gli assicurati a “basso rischio” hanno una probabilità del 2% di subire un danno che prevede il pagamento dell’assicurazione, mentre tale probabilità è del 10% per gli assicurati a “medio rischio” e del 20% per quelli ad “alto rischio”.

(1) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell’assicurazione?
(2) Se un individuo reclama il pagamento dell’assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad “alto rischio”?

Exercise 1.7. Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l’altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell’incidente era giallo. Sappiamo che i taxi bianchi sono l’85% dei taxi in città. Inoltre, la probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore del taxi è pari a 0.8.

(i) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell’incidente fosse in realtà bianco?
(ii) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell’identificazione del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella del primo. Sulla base di questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell’incidente fosse in realtà bianco?

Exercise 1.8. Il Ministero della Pubblica Istruzione vuole stimare la frazione $\alpha \in (0,1)$ di studenti di terza media che hanno preparazione scarsa in matematica. A tal fine, sottopone a un grande numero di studenti un quesito con 10 possibili risposte, di cui una sola è corretta. Assumiamo che gli studenti con una buona preparazione in matematica rispondano correttamente al quesito, mentre quelli con preparazione scarsa diano una risposta scelta a caso (e non esistano altre possibilità). Sottoponendo ad una analisi più approfondita gli studenti che hanno risposto correttamente al quesito, si scopre che tra questi solo l’80% ha una buona preparazione in matematica. Sulla base di queste informazioni, si determini α.

Exercise 1.9. Tre urne, etichettate con le lettere α, β, γ, contengono 10 palline ciascuna. Due urne contengono 5 palline rosse e 5 blu, mentre la terza contiene 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale sia l’urna con 3 palline rosse: in assenza di ulteriori informazioni, riteniamo che sia α, β o γ con la stessa probabilità.

Estraiamo ora 2 palline da ognuna delle tre urne. Se dall’urna α abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, dall’urna β due palline rosse e dall’urna γ due palline blu, qual è la probabilità che l’urna γ sia quella contenente tre palline rosse?

Exercise 1.10. Un’urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

(1) Si effettuano n estrazioni successive, *con* reimmissione. Si considerino gli eventi

$$B_j := \text{“la } j\text{-esima pallina estratta è bianca”},$$
$$A_m := \text{“delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche”},$$

dove $j, m \leq n$. Si calcoli $\mathrm{P}(B_j | A_m)$.

(2) Si calcoli la probabilità condizionale del punto precedente nel caso di estrazioni *senza* reimmissione, supponendo che m sia tale che $\mathrm{P}(A_m) > 0$.