Capitolo 1

1.1 Parte IV

Exercise 1.1. Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Si mostri che

(1) $A \cap B$ è indipendente da C.

(2) $A \cup B$ è indipendente da C.

Exercise 1.2. Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi indipendenti tali che $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1$. Si mostri che esiste $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $\mathrm{P}(A_k) = 1$.

Exercise 1.3. Siano A, B eventi. Ricordando che $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, si mostri che

$$\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\,\mathrm{P}(A \cap B).$$

Siano ora A, B, C tre eventi. Si mostri che

$$\mathrm{P}(A \triangle C) \le \mathrm{P}(A \triangle B) + \mathrm{P}(B \triangle C).$$

Exercise 1.4. Siano A e B due eventi arbitrari di uno spazio di probabilità (Ω, P). Si dimostri la disuguaglianza

$$\mathrm{P}(A \cap B) \ge \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1.$$

Si mostri quindi per induzione che, per ogni $n \ge 2$ e per ogni scelta degli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$, si ha

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \ge \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - (n-1).$$

Exercise 1.5. Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n-k$ verdi, con $1 \le k \le n-1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

$$A_1 := \text{“la prima pallina estratta è rossa”},$$
$$A_2 := \text{“la seconda pallina estratta è rossa”}.$$

Si mostri che gli eventi A_1 e A_2 non sono indipendenti.

Exercise 1.6. Si voglia illuminare una stanza con un certo numero di lampadine. Assumiamo che la probabilità che una lampadina sopravviva almeno n giorni vale p^n, con $p = 0.9$. Si può ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine occorre installare affinché, con probabilità almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?

Exercise 1.7. Ho due dadi regolari: il dado α ha sei facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 6, mentre il dado β ha dodici facce, su cui sono scritti i numeri da 1 a 12. Scelgo uno dei due dadi a caso, con la stessa probabilità, e lo lancio per n volte, dove $n \in \mathbb{N}$ è un numero fissato.

(1) Qual è la probabilità che tutti i lanci diano come risultato il numero 3?
(2) Qual è la probabilità che tutti i lanci diano come risultato lo stesso numero?
(3) Se tutti i lanci danno come risultato il numero 3, qual è la probabilità che il dado scelto sia stato α? Si mostri che tale probabilità (condizionale) è sempre strettamente maggiore di $\frac{1}{2}$ e se ne studi il comportamento per $n \to \infty$.

Exercise 1.8. Ho un'urna inizialmente vuota e un insieme di palline numerate coi numeri naturali. Il primo giorno inserisco nell'urna le palline numero 1 e 2, dopodiché ne estraggo una a caso (nell'urna rimane dunque una sola pallina). Il secondo giorno inserisco nell'urna le palline numero 3 e 4, dopodiché estraggo a caso una delle tre palline contenute nell'urna. Itero dunque la procedura: l'i-esimo giorno inserisco nell'urna le palline numero $2i-1$ e $2i$, dopodiché estraggo a caso una delle $i+1$ palline contenute nell'urna.

Si introduca per $i \in \mathbb{N}$ l'evento

$$A_i := \text{“la pallina numero 1 è presente nell'urna alla fine dell'}i\text{-esimo giorno”}.$$

(1) Si spieghi perchè vale l'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e si deduca la formula
$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2|A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
(2) Si mostri che $\mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Exercise 1.9. Si consideri il seguente modello per la distribuzione dei sessi dei figli in una famiglia:

- il primo figlio ha proabilità $\frac{1}{2}$ di essere maschio (o femmina);
- la probabilità che l'$(n+1)$-esimo figlio sia maschio, condizionalmente ai sessi dei figli precedenti, è $\frac{3}{5}$ se l'n-esimo figlio è maschio, $\frac{2}{5}$ se l'n-esimo figlio è femmina.

Si determini quindi:

(1) la probabilità che il primo figlio sia maschio, condizionale al fatto che il secondo è maschio;
(2) la probabilità che il primo figlio sia maschio, condizionale al fatto che il terzo è maschio.

Exercise 1.10. Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado regolare a sei facce. Se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?

Exercise 1.11. Antonio e Berta si incontrano per una gara di scacchi. Convengono di fare due partite, assegnando un punto in caso di vittoria, zero punti in caso di sconfitta e mezzo punto in caso di pareggio o patta. Nel caso in cui dopo le due partite i due giocatori abbiano lo stesso punteggio, lanceranno una moneta equilibrata per determinare il vincitore della gara.

Antonio sa giocare con due diversi approcci, uno offensivo e uno difensivo, mentre Berta gioca sempre in maniera offensiva. Se Antonio gioca in maniera offensiva, vince con probabilità $p \in (0,1]$ e perde con probabilità $1-p$. Se invece gioca in maniera difensiva, pareggia con probabilità $q \in (0,1]$ e perde con probabilità $1-q$.

Antonio decide di adottare la seguente strategia. Gioca la prima partita in maniera offensiva. Se perde, gioca anche la seconda in maniera offensiva, mentre se vince gioca la seconda partita in maniera difensiva.

(1) Si calcoli, in termini di p e q, la probabilità p_* che Antonio vinca la gara.
(2) Si assuma che $q = 0.9$. Per quali valori di p si ha $p_* > \frac{1}{2}$? È possibile che Berta sia la giocatrice più forte — nel senso che ha maggiore probabilità di vincere una partita rispetto ad Antonio — e ciononostante Antonio abbia maggiore probabilità di vincere la gara?

Exercise 1.12. Una guida alpina organizza abitualmente salite alla cima del Monte Archimede. Talvolta, in presenza di cattive condizioni atmosferiche, la guida decide di tornare prima di aver raggiunto la cima, anche a seconda delle capacità delle persone accompagnate. In caso di pioggia senza raffiche di vento, la guida rinuncia a raggiungere la cima il 20% delle volte; in caso di raffiche di vento ma senza pioggia, la guida rinuncia il 30% delle volte; con pioggia e raffiche di vento, la guida rinuncia l'80% delle volte; infine, se non piove e non ci sono raffiche di vento, la cima viene sicuramente raggiunta. Assumiamo che gli eventi "si trova pioggia lungo il percorso" e "ci sono raffiche di vento lungo il percorso" siano indipendenti e abbiano probabilità rispettivamente 0.3 e 0.2.

Oggi un gruppo è partito con la guida, ma è tornato senza aver raggiunto la cima. Qual è la probabilità che abbia trovato pioggia?

Exercise 1.13. (1) Si dimostri che, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, allora per ogni scelta di $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ si ha

$$\min_{i=1,2,\dots n} x_i \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \le \max_{i=1,2,\dots n} x_i.$$

(2) Siano ora $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi *disgiunti* di uno spazio di probabilità (Ω, P), tali che $\mathrm{P}(A_i) > 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Si mostri che per ogni evento B

$$\min_{i=1,2,\dots n} \mathrm{P}(B|A_i) \le \mathrm{P}(B|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \le \max_{i=1,2,\dots n} \mathrm{P}(B|A_i).$$

Exercise 1.14. Siano A e B due eventi con probabilità non nulla. Diciamo che *A è positivamente correlato a B* se

$$\mathrm{P}(A|B) \ge \mathrm{P}(A).$$

Si mostri che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti.

(1) *A è positivamente correlato a B.*
(2) *B è positivamente correlato a A.*
(3) *A^c è positivamente correlato a B^c.*

Exercise 1.15. Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non conosciamo la composizione dell'urna e riteniamo che tutti i possibili valori $k = 0, 1, 2, \dots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

(1) Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?
(2) Si risponda alla medesima domanda, ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Exercise 1.16. Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia n figli, con $n \ge 0$, vale $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ (dove $\lambda > 0$ è un parametro fissato), e ciascun figlio è maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri. Consideriamo l'evento

$$A_k := \text{“il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente } k \text{ figli maschi”},$$

per $k \ge 0$. Si mostri che $\mathrm{P}(A_k) = e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}$.

[*Sugg.* Si consideri l'evento $B_n =$ “il nucleo familiare scelto ha n figli”. Si determini innanzitutto $\mathrm{P}(A_k|B_n)$ e poi si calcoli $\mathrm{P}(A_k)$. Si ricordi la serie esponenziale (**??**).]

Exercise 1.17. Sia $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Omega := \mathscr{P}(S) \times \mathscr{P}(S)$, e P la probabilità uniforme su Ω. Dunque gli elementi di Ω sono coppie ordinate (A, B), con $A, B \subseteq S$. Consideriamo l'evento

$$E := \{(A, B) \in \Omega : A \subseteq B\}.$$

Inoltre, per $B \subseteq S$, definiamo $F_B := \{(A', B') \in \Omega : B' = B\} = \{(A, B) : A \subseteq S\}$.

(1) Si determini $\mathrm{P}(E|F_B)$.

(2) Usando la formula di disintegrazione

$$\mathrm{P}(E) = \sum_{B \subseteq S} \mathrm{P}(E|F_B)\,\mathrm{P}(F_B),$$

si mostri che $\mathrm{P}(E) = (3/4)^n$.

[*Sugg.* Si ricordi il binomio di Newton (**??**) e il fatto che $|\mathscr{P}(S)| = 2^{|S|}$.]

Exercise 1.18. È stato indetto un referendum in una popolazione di $n \geq 1$ individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SÌ con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri.

(1) Qual è la probabilità p che un individuo scelto a caso vada a votare e voti SÌ?
(2) Qual è la probabilità che il numero di voti SÌ sia k, per $k \in \{0, \dots, n\}$?
(3) Assumendo che i voti SÌ siano k, si determini la probabilità (condizionale) che i votanti totali siano m, dove $m \in \{k, \dots, n\}$. Si mostri che tale probabilità vale

$$\binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}.$$