# Capitolo 1

## 1.1 Parte IX

**Exercise 1.1.** Sia $X$ una variabile aleatoria reale assolutamente continua e sia $(a,b)$ un intervallo aperto (limitato o illimitato) di $\mathbb{R}$, tale che $\mathrm{P}(X \in (a,b)) = 1$. Sia $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^1$ tale che $\varphi'(x) > 0$ (oppure $< 0$) per ogni $x \in (a,b)$. Allora l'immagine di $\varphi$ è un intervallo aperto $(c,d)$. L'obiettivo di questo esercizio è di mostrare che la variabile aleatoria $Y := \varphi(X)$ è assolutamente continua, con densità

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right) \mathbb{1}_{(c,d)}(y)\,, \tag{1.1}$$

dove $\varphi^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ indica la funzione inversa di $\varphi$.

Si consideri solo il caso $\varphi'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ (il caso $\varphi'(x) < 0$ è analogo).

(i) Si mostri che la funzione di ripartizione di $Y$ è data da

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le c \\ F_X(\varphi^{-1}(y)) & \text{se } c < y < d \\ 1 & \text{se } y \ge d \end{cases}$$

(ii) Assumendo che $F_X$ sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, si concluda che $Y$ è assolutamente continua, con densità $f_Y$ data da (1.1).

(iii) Si giunga alla stessa conclusione senza assumere che $F_X$ sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, usando la formula di cambio di variabili 6.12 delle dispense.

**Solution 1.1.** Assumiamo che $\varphi'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ (il caso $\varphi'(x) < 0$ è analogo). Dunque $\varphi$ è strettamente crescente, pertanto l'immagine $\varphi((a,b))$ è un intervallo aperto $(c,d)$, la funzione $\varphi$ ammette inversa $\varphi^{-1} : (c,d) \to (a,b)$, anch'essa di classe $\mathscr{C}^1$, e per ogni $y \in (c,d)$

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)}. \tag{1.2}$$

(i) Determiniamo la funzione di ripartizione di $Y$. Innanzitutto $F_Y(y) = 0$ se $y \le c$ mentre $F_Y(y) = 1$ se $y \ge d$, perché per ipotesi $\mathrm{P}(X \in (a,b)) = 1$, e dunque $\mathrm{P}(Y \in (c,d)) = 1$. Per $y \in (c,d)$, usando la monotonia stretta di $\varphi$, si ha che $\varphi(x) \le y$ se e solo se $x \le \varphi^{-1}(y)$, quindi

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(\varphi(X) \le y) = \mathrm{P}(X \le \varphi^{-1}(y)) = F_X(\varphi^{-1}(y)). \tag{1.3}$$

(ii) Assumiamo che $F_X$ sia $\mathscr{C}^1$ a tratti. Allora anche $F_Y$ lo è, perché $\varphi^{-1}$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^1$. Per la Proposizione 6.16 delle dispense, $Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\varphi^{-1}(y)) \cdot (\varphi^{-1})'(y)\, \mathbb{1}_{(c,d)}(y),$$

e ricordando (1.2) si ottiene la relazione cercata (1.1).

(iii) In completa generalità, per $y \in (c,d)$ possiamo scrivere, grazie a (1.3) e al fatto che $f_X(x) = 0$ se $x \notin (a,b)$,

$$F_Y(y) = F_X(\varphi^{-1}(y)) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dato che la funzione ristretta $\varphi^{-1} : (c,y) \to (a, \varphi^{-1}(y))$ è di classe $\mathscr{C}^1$, con il cambio di variabili $x = \psi(t) := \varphi^{-1}(t)$ (si ricordi la formula 6.12 delle dispense) l'integrale può essere riscritto come

$$F_Y(y) = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^y f_X(\varphi^{-1}(t))\,(\varphi^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ricordando la relazione (1.2) e indicando con $g(y)$ la funzione nel membro destro di (1.1), abbiamo mostrato che $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y g(t)\,\mathrm{d}t$, per ogni $y \in (c,d)$. È facile verificare che questa relazione vale anche per $y \le c$ e $y \ge d$, perché entrambi i membri valgono 0 e 1 rispettivamente. Ricordando la Definizione 6.11 delle dispense, segue che $Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità $f_Y(y) = g(y)$, che è esattamente quanto dovevamo dimostrare.

**Exercise 1.2.** Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie reali indipendenti, con la stessa distribuzione. Indicando con $F = F_{X_i}$ la comune funzione di ripartizione, facciamo l'ipotesi che $F$ sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, così che $f(x) = F'(x)$ è la densità delle $X_i$.

Si mostri che $Z := \max(X_1, \ldots, X_n)$ e $W := \min(X_1, \ldots, X_n)$ sono variabili aleatorie assolutamente continue, con densità

$$f_Z(x) = n\left(F(x)\right)^{n-1} f(x), \qquad f_W(x) = n\left(1 - F(x)\right)^{n-1} f(x). \tag{??}$$

**Solution 1.2.** Applicando la Proposizione 3.93 delle dispense (la cui dimostrazione è valida, senza alcuna modifica, per variabili aleatorie generali), le funzioni di ripartizione di $W$ e $Z$ sono date rispettivamente da

$$F_Z(x) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x) = F(x)^n, \quad F_W(x) = 1 - \prod_{k=1}^{n}[1 - F_{X_k}(x)] = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n.$$

Dato che $F$ è per ipotesi $\mathscr{C}^1$ a tratti, anche $F_Z$ e $F_W$ lo sono; per la Proposizione 6.16, $Z$ e $W$ sono variabili aleatorie assolutamente continue, con densità

$$f_Z(x) = (F_Z)'(x) = n\big(F(x)\big)^{n-1} F'(x) = n\big(F(x)\big)^{n-1} f(x),$$
$$f_W(x) = (F_W)'(x) = n\big(1 - F(x)\big)^{n-1} F'(x) = n\big(1 - F(x)\big)^{n-1} f(x).$$

**Exercise 1.3.** Sia $X$ una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$, definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Per $s \in [0, +\infty)$, definiamo

$$\mathrm{P}^{(s)} := \mathrm{P}(\,\cdot\,|X > s), \qquad X^{(s)} := X - s.$$

Si mostri che la variabile aleatoria $X^{(s)}$, rispetto alla probabilità (condizionale) $\mathrm{P}^{(s)}$, ha distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$, per ogni $s \in [0, \infty)$.

[*Sugg.* Si calcoli la funzione di ripartizione $\mathrm{P}^{(s)}(X^{(s)} \le x)$, sfruttando la Proposizione 6.31 delle dispense.]

**Solution 1.3.** Segue dalla Proposizione 6.31 che per ogni $x \ge 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{(s)}(X^{(s)} \le x) &= \mathrm{P}(X - s \le x\,|\,X > s) = \mathrm{P}(X \le x + s\,|\,X > s) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X > x + s\,|\,X > s) = 1 - \mathrm{P}(X > x) = \mathrm{P}(X \le x). \end{aligned}$$

Dato che per $x < 0$ si ha $\mathrm{P}^{(s)}(X^{(s)} \le x) = \mathrm{P}(X \le x) = 0$, abbiamo mostrato che la variabile aleatoria $X^{(s)}$ rispetto alla probabilità (condizionale) $\mathrm{P}^{(s)}$ ha la stessa funzione di ripartizione, e dunque la stessa distribuzione, della variabile aleatoria $X$ rispetto alla probabilità originale P, cioè $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

**Exercise 1.4.** Data una variabile aleatoria $X \sim \mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$, si mostri che $Y := \cos(X)$ è una variabile assolutamente continua e se ne determini la densità.

**Solution 1.4.** Per ipotesi $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$, quindi

$$\mathrm{P}(X \in A) = \int_{A \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{|A \cap (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|}{\pi}.$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di $Y$. Chiaramente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$, dal momento che $\cos(x) \in [0,1]$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si noti che per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y \in [0,1]$ si ha $\cos(x) \le y$ se e solo se $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})$, quindi per ogni $y \in [0,1]$ si ha

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(\cos(X) \le y) \\
&= \mathrm{P}\big(X \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \tfrac{\pi}{2})\big) \\
&= \frac{|(-\frac{\pi}{2}, -\arccos(y)] \cup [\arccos(y), \frac{\pi}{2})|}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(y)\right).
\end{aligned}
$$

Dato che la funzione $F_Y$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti (è continua su $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$), segue dalla Proposizione 6.16 che $Y$ è assolutamente continua, con densità

$$
f_Y(y) = (F_Y)'(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \mathbb{1}_{(0,1)}(y).
$$

**Exercise 1.5.** Sia $X$ un punto scelto uniformemente nell'intervallo $[0,2]$. Qual è la probabilità che il triangolo equilatero di lato $X$ abbia area maggiore di 1?

**Solution 1.5.** L'area del triangolo equilatero di lato $X$ vale $A := \frac{\sqrt{3}}{4}X^2$, pertanto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A > 1) &= \mathrm{P}\left(X^2 > \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \mathrm{P}\left(X \in \left(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}\right) \cup \left(\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty\right)\right) \\
&= \int_{(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}) \cup (\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty)} f_X(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{(-\infty, -\frac{2}{(3)^{1/4}}) \cup (\frac{2}{(3)^{1/4}}, +\infty)} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(0,2)}(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{(3)^{1/4}}\right) = 1 - 3^{-1/4} \simeq 0.24.
\end{aligned}
$$

**Exercise 1.6.** Sia $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ e sia $Y := 4X(1-X)$.

(i) Si determini la funzione di ripartizione di $Y$, si deduca che la variabile $Y$ è assolutamente continua e se ne calcoli la densità.

(ii) Si calcoli $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (che è ben definita: perché?).

**Solution 1.6.** (i) Chiaramente $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ mentre $F_Y(y) = 1$ se $y > 1$, quindi basta concentrarsi sul caso $0 \le y \le 1$. In questo caso, la disequazione $4x(1-x) \le y$ ha come soluzioni $x \le \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-y})$ oppure $x \ge \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-y})$, pertanto

$$
F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}\left(X \le \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-y})\right) + \mathrm{P}\left(X \ge \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-y})\right).
$$

Notiamo che $\mathrm{P}(X \le x) = x$ e $\mathrm{P}(X \ge x) = 1 - x$ se $x \in [0,1]$. Dato che i punti $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-y})$ sono nell'intervallo $[0,1]$ per $y \in [0,1]$, segue che

$$
F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-y}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-y}) = 1 - \sqrt{1-y}.
$$

In definitiva,

$$F_Y(y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1-\sqrt{1-y} & \text{se } y \in [0,1] \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases} .$$

La funzione $F_Y(\cdot)$ è dunque $\mathscr{C}^1$ a tratti, di conseguenza la variabile $Y$ è assolutamente continua. La sua densità è data da

$$f_Y(y) \;=\; F_Y'(y) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,1_{(0,1)}(y)\,.$$

(ii) La covarianza di $X$ e $Y$ è ben definita perché entrambe le variabili aleatorie sono in $L^2$ (infatti sono limitate). Per le proprietà del valor medio

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; \mathrm{E}(4X(1-X)) \;=\; 4\,\mathrm{E}(X) - 4\,\mathrm{E}(X^2)\,,$$
$$\mathrm{E}(XY) \;=\; \mathrm{E}(X\cdot 4X(1-X)) \;=\; 4\,\mathrm{E}(X^2) - 4\,\mathrm{E}(X^3)\,,$$

quindi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \;=\; 4\,\mathrm{E}(X^2)(1+\mathrm{E}(X)) - 4(\mathrm{E}(X^3) + \mathrm{E}(X)^2)\,.$$

Per la Proposizione 6.21, si calcola

$$\mathrm{E}(X^n) \;=\; \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,,$$

da cui segue che $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$ e $\mathrm{E}(X^3) = \frac{1}{4}$, dunque

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; 4\frac{1}{2} - 4\frac{1}{3} \;=\; \frac{2}{3}\,,$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \;=\; 0\,.$$

**Exercise 1.7.** Sia $X$ una variabile aleatoria reale assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = -\log(x^c)\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

(i) Si determini il valore di $c \in \mathbb{R}$ affinché $f_X$ sia effettivamente una densità, e si determini la funzione di ripartizione di $X$.

(ii) Sia $Y = -\log X$. Si mostri che $Y \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\lambda)$, determinando $\alpha$ e $\lambda$.

**Solution 1.7.** (i) Si deve avere

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = -c\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = -c[x\log x - x]_0^1 = c\,,$$

da cui $c = 1$. $F_X(x) = 0$ per $x \le 0$, $F_X(x) = 1$ per $x > 1$, e, per $0 < x \le 1$:

$$F_X(x) = -\int_0^x \log(t)\,\mathrm{d}t = x - x\log(x).$$

(ii) Si noti che $-\log X$ assume valori positivi. Allora, per $t \geq 0$:

$$\mathrm{P}(Y \leq t) = \mathrm{P}(X \geq e^{-t}) = 1 - F_X(e^{-t}) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Derivando rispetto a $t$ si ottiene

$$f_Y(x) = xe^{-x}\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x),$$

ossia $Y \sim \mathrm{Gamma}(2,1)$.

**Exercise 1.8.** Sia $X \sim \mathrm{U}(-1,1)$. Si determini la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Y := X^+ = \max(X,0)$. Si deduca che la distribuzione di $Y$ non è né discreta né assolutamente continua.

**Solution 1.8.** Chiaramente $Y \geq 0$, quindi per $y < 0$ si ha $F_Y(y) = \mathrm{P}(X \leq y) = 0$. Per $y \geq 0$ si ha $\max(x,0) \leq y$ se e solo se $x \leq t$, quindi

$$F_Y(y) = F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{\min(y,1)} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\min(y,1)+1}{2}.$$

In definitiva

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \frac{y+1}{2} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}.$$

Si noti che $F_Y(0+) = F_Y(0) = \frac{1}{2} \neq F_Y(0-) = \lim_{y\uparrow 0} F_Y(y) = 0$, quindi la funzione $F_Y(y)$ non è continua nel punto $y = 0$; di conseguenza, la variabile aleatoria $Y$ non è assolutamente continua. Inoltre, la variabile aleatoria $Y$ non può essere nemmeno discreta: infatti, se lo fosse, si dovrebbe avere che $1 = \sum_{y\in\mathbb{R}} \mathrm{P}(Y = y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} (F_Y(y) - F_Y(y-))$; ma $F_Y(y) = F_Y(y-)$ per ogni $y \neq 0$ e quindi l'ultima somma vale $F_Y(0) - F_Y(0-) = \frac{1}{2}$.

**Exercise 1.9.** Sia $X$ una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := 3x^2\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Si considerino le variabili aleatorie

$$A := -\log X, \qquad B := \min\{1, A\}.$$

(i) Si calcoli la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $A$ e se ne identifichi la distribuzione (notevole).

(ii) Consideriamo la seguente equazione di secondo grado per l'incognita $x$, con coefficienti determinati dalla variabile aleatoria $A$:

$$x^2 + 3Ax + 2A^2 + 4 = 0.$$

Qual è la probabilità che l'equazione non ammetta soluzioni reali?

(iii) Si calcoli la funzione di ripartizione di $B$ e si deduca che $B$ non è una variabile aleatoria assolutamente continua. $B$ è una variabile aleatoria discreta?

**Solution 1.9.** (i) Per $t \geq 0$ si ha $F_A(t) = \mathrm{P}(A \leq t) = \mathrm{P}(X \geq e^{-t}) = \int_{e^{-t}}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-3t}$, mentre chiaramente $F_A(t) = 0$ per $t < 0$. Dato che $F_A$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti, la variabile aleatoria $A$ è assolutamente continua con densità

$$f_A(t) = F_A'(t) = 3\,e^{-3t}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\,,$$

ossia $A \sim \mathrm{Exp}(3)$.

(ii) L'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni $x$ reali se e solo se il discriminante $\Delta := b^2 - 4ac$ è strettamente negativo, ossia

$$(3A)^2 - 4(2A^2 + 4) = 9A^2 - 8A^2 - 16 = A^2 - 16 < 0\,,$$

e la probabilità di tale evento vale

$$\mathrm{P}(A^2 - 16 < 0) = \mathrm{P}(A^2 < 16) = \mathrm{P}(A < 4) = 1 - e^{-12}\,,$$

dove la seconda disuguaglianza è valida perché $A \geq 0$.

(iii) Per $t < 1$ si ha $F_B(t) = \mathrm{P}(B \leq t) = \mathrm{P}(A \leq t) = F_A(t)$, mentre per $t \geq 1$ si ha $F_B(t) = 1$. Quindi

$$F_B(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-3t} & \text{se } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}.$$

Dato che $F_B(1-) = 1 - e^{-3}$ mentre $F_B(1) = 1$, si ha che $\mathrm{P}(B = 1) = F_B(1) - F_B(1-) = e^{-3} > 0$, dunque $B$ non è assolutamente continua. Allo stesso tempo, $B$ non è discreta, perché in questo caso si dovrebbe avere che $1 = \sum_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{P}(B = t) = \sum_{t \in \mathbb{R}} (F_B(t) - F_B(t-))$, ma $F_B(t) - F_B(t-) = 0$ per ogni $t \neq 1$ e dunque $\sum_{t \in \mathbb{R}} (F_B(t) - F_B(t-)) = F_B(1) - F_B(1-) = e^{-3} < 1$.

**Exercise 1.10.** Sia $X$ una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$ e sia

$$Z := \frac{1}{X^r}\,,$$

con $r \in \mathbb{R}$ parametro fissato.

(i) Per quali valori di $p \in (0, \infty)$ si ha $\mathrm{E}(|Z|^p) < \infty$, ossia $Z \in L^p$?

(ii) Si determini la distribuzione della variabile aleatoria $Z$.

[*Sugg.* Si calcoli la funzione di ripartizione di $Z$, separando i casi $r < 0$, $r = 0$ e $r > 0$.]

**Solution 1.10.** (i) Con un facile calcolo, applicando la Proposizione 6.21, si ha

$$\mathrm{E}(|Z|^p) = \int_0^1 x^{-rp}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-rp} < \infty & \text{se } rp < 1 \\ +\infty & \text{se } rp \geq 1 \end{cases},$$

dato che una primitiva di $x^{-rp}$ è $\frac{1}{1-rp}x^{1-rp}$ se $rp \neq 1$ e $\log x$ se $rp = 1$. Quindi $Z \in L^p$ se e solo se $rp < 1$. Dunque, se $r \leq 0$, $Z \in L^p$ per ogni $p \in (0,\infty)$, mentre se $r > 0$ si ha che $Z \in L^p$ per ogni $p \in (0, \frac{1}{r})$ mentre $Z \notin L^p$ se $p \geq \frac{1}{r}$.

(ii) Se $r = 0$ si ha chiaramente $Z \equiv 1$, ossia $Z$ è quasi certamente costante, dunque $Z$ è una variabile aleatoria discreta con densità discreta $\mathrm{p}_Z(x) = \mathbb{1}_{\{1\}}(x)$.
Sia ora $r \neq 0$. Calcoliamo la funzione di ripartizione $F_Z$ di $Z$. Chiaramente $F_Z(x) = 0$ per $x \leq 0$, perché $Z > 0$. Per $x > 0$ si ha

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(Z \leq x) = \mathrm{P}(X^{-r} \leq x).$$

Se $r > 0$ si ha $X^{-r} \leq x$ se e solo se $X \geq x^{-1/r}$, dunque

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(X \geq \tfrac{1}{x^{1/r}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{1/r}} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Dato che $F_Z$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che $Z$ è assolutamente continua con densità

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{r}\frac{1}{x^{1+1/r}}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$

Se invece $r < 0$ si ha $X^{-r} \leq x$ se e solo se $X \leq x^{-1/r} = x^{1/|r|}$, dunque

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(X \leq x^{1/|r|}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^{1/|r|} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Quindi $F_Z$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti e segue che $Z$ è assolutamente continua con densità

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{|r|}x^{\frac{1}{|r|}-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

**Exercise 1.11.** Siano $X$ e $Y$ variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(-1,+1)$. Si mostri che $Z := X+Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Z(z) = \frac{1}{4}(2-|z|)\,\mathbb{1}_{(-2,+2)}(z).$$

**Solution 1.11.** $Z$ è assolutamente continua perché somma di variabili aleatorie assolutamente continue indipendenti, grazie alla Proposizione 6.25, e la sua densità è data dalla convoluzione

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= (f_X * f_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-1,+1)}(x)\,\mathbb{1}_{(-1,+1)}(z-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-1,+1)\cap(z-1,z+1)}(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

Notiamo che

$$
(-1,+1)\cap(z-1,z+1) = \begin{cases} (z-1,1) & \text{se } z\in[0,2) \\ (-1,z+1) & \text{se } z\in(-2,0) \\ \emptyset & \text{se } x\notin(-2,+2) \end{cases} ,
$$

pertanto $f_Z(z)=0$ se $z\notin(-2,+2)$, mentre per ogni $z\in(-2,+2)$ la lunghezza dell'intervallo $(-1,+1)\cap(z-1,z+1)$ è pari a $2-|z|$ e quindi $f_Z(z)=\frac{1}{4}(2-|z|)$.

**Exercise 1.12.** Siano $X,Y$ variabili aleatorie indipendenti, entrambe con distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$, e si definisca $Z:=X-Y$.

(i) Si mostri che $Z$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$
f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}\,.
$$

[*Sugg.* Si ponga $Y':=-Y$, così che $Z=X+Y'$.]

(ii) Si mostri che $|Z|\sim\mathrm{Exp}(1)$.

**Solution 1.12.** (i) Si noti che la variabile aleatoria $W:=-Y$ è assolutamente continua con densità $f_W(w)=f_Y(-w)$ ed è indipendente da $X$ (perché?). Dato che $Z=X-Y=X+W$, applichiamo la Proposizione 6.25 dato che $f_X(x)=f_Y(x)=e^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, per $z\geq 0$ si ha

$$
f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(x-z)\,\mathrm{d}x = \int_z^{+\infty} e^{-x}e^{-(x-z)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{-z}\,.
$$

Analogamente per $z\leq 0$ si ha $f_Z(z)=\frac{1}{2}e^{z}$. In definitiva $f_Z(z)=\frac{1}{2}e^{-|z|}$.

(ii) La funzione di ripartizione $F_{|Z|}(t)$ è chiaramente nulla per $t<0$, mentre per $t\geq 0$

$$
F_{|Z|}(t) = \mathrm{P}(|Z|\leq t) = \mathrm{P}(-t\leq Z\leq t) = \int_{-t}^{t} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = 2\int_0^t \frac{e^{-z}}{2}\,\mathrm{d}z = 1-e^{-t}\,.
$$

Dato che $F_{|Z|}$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che $|Z|$ è assolutamente continua con densità

$$
f_{|Z|}(t) = F'_{|Z|}(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\,,
$$

cioè $|Z|\sim\mathrm{Exp}(1)$.

**Exercise 1.13.** Sia $X$ un punto aleatorio dell'intervallo $(0,1)$ (non necessariamente uniformemente distrbuito). Esso divide l'intervallo $(0,1)$ in due segmenti. Sia $Y\geq 1$ il rapporto tra il segmento più lungo e quello più corto.

(i) Si esprima $Y$ in funzione di $X$.

[*Sugg.* Potrebbe risultare utile usare gli eventi $\{X < \frac{1}{2}\}$ e $\{X \geq \frac{1}{2}\}$.]

(ii) Supponiamo che $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Si determinino la funzione di ripartizione e la densità di $Y$ e si mostri che $Y$ ha valor medio infinito.

(iii) Assumiamo ora che $X$ sia una variabile aleatoria assolutamente continua, a valori in $(0,1)$, la cui densità $f_X$ soddisfi la relazione:

$$f_X(x) + f_X(1-x) = 2\,, \qquad \text{per ogni } x \in (0,1)\,. \tag{1.4}$$

Si mostri che la distribuzione di $Y$ è uguale a quella trovata al punto precedente.

[*Sugg.* Si deduca dalla relazione (1.4) che $F_X(z) - F_X(1-z) = 2z - 1$ per $z \in (0,1)$.]

(iv) Si determini una densità $f_X$, soddisfacente alla relazione (1.4), *diversa* dalla densità di una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$.

**Solution 1.13.** (i) Per definizione si ha

$$Y \,=\, \left(\frac{X}{1-X}\right) \mathbb{1}_{\{X \geq \frac{1}{2}\}} \,+\, \left(\frac{1-X}{X}\right) \mathbb{1}_{\{X < \frac{1}{2}\}}\,.$$

(ii) Dato che $Y \geq 1$, si ha $F_Y(y) = 0$ per $y < 1$, mentre per $y \geq 1$, usando il punto precedente,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leq y) \,=\, \mathrm{P}(Y \leq y, X \geq \tfrac{1}{2}) + \mathrm{P}(Y \leq y, X < \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathrm{P}(\tfrac{X}{1-X} \leq y, X \geq \tfrac{1}{2}) + \mathrm{P}(\tfrac{1-X}{X} \leq y, X < \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathrm{P}(X \leq \tfrac{y}{1+y}, X \geq \tfrac{1}{2}) + \mathrm{P}(X \geq \tfrac{1}{1+y}, X < \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathrm{P}(\tfrac{1}{2} \leq X \leq \tfrac{y}{1+y}) + \mathrm{P}(\tfrac{1}{1+y} \leq X < \tfrac{1}{2}) \,=\, \mathrm{P}(\tfrac{1}{1+y} \leq X \leq \tfrac{y}{1+y})\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dato che $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, per $0 \leq a \leq b \leq 1$ si ha $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = |[a,b]| = b - a$, pertanto

$$F_Y(y) \,=\, \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ \frac{y-1}{y+1} & \text{se } y \geq 1 \end{cases}. \tag{1.6}$$

Dato che $F_Y$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che $Y$ è assolutamente continua con densità

$$f_Y(y) \,=\, F_Y'(y) \,=\, \frac{2}{(1+y)^2}\, \mathbb{1}_{[1,\infty)}(y)\,.$$

Il valor medio di $Y$ (che è ben definito, essendo $Y$ positiva) è dunque dato da

$$\mathrm{E}(Y) \,=\, \int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\, \mathrm{d}y \,=\, \int_1^\infty \frac{2y}{(1+y)^2}\, \mathrm{d}y \,=\, +\infty\,,$$

perché $\frac{2y}{(1+y)^2} \sim \frac{2}{y}$ per $y \to +\infty$.

(iii) Applicando la formula (1.5) ottenuta nel punto precedente, per $y \geq 1$ si ha

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(\tfrac{1}{1+y} \leq X \leq \tfrac{y}{1+y}) = \int_{\frac{1}{1+y}}^{\frac{y}{1+y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Con il cambio di variabili $x = 1-z$ nell'integrale, osservando che $1 - \frac{1}{1+y} = \frac{y}{1+y}$, si ottiene

$$F_Y(y) = \int_{\frac{1}{1+y}}^{\frac{y}{1+y}} f_X(1-z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Cambiando la variabile di integrazione $z \to x$ e facendo la media delle due espressioni precedenti, si ha che

$$F_Y(y) = \int_{\frac{1}{1+y}}^{\frac{y}{1+y}} \frac{1}{2}\big(f_X(x) + f_X(1-x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Per ipotesi $\frac{1}{2}(f_X(x) + f_X(1-x)) = 1$, pertanto $F_Y(y) = \frac{y}{1+y} - \frac{1}{1+y} = \frac{y-1}{1+y}$ per ogni $y \geq 1$. Dato che chiaramente $F_Y(y) = 0$ per $y < 1$, la funzione di ripartizione, e dunque la distribuzione, di $Y$ è la stessa determinata nel punto precedente.

(iv) È sufficiente considerare, ad esempio, la densità

$$f(x) := \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{se } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

(Il valore della densità $f(x)$ per $x = \frac{1}{2}$ è irrilevante, ma è stato definito esplicitamente in modo che la relazione (1.4) sia soddisfatta.)

**Exercise 1.14.** Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e con la stessa distribuzione) con $X_i \sim \mathrm{U}(0,1)$.

(i) Poniamo $Y_n := -\log(X_n)$ per $n \in \mathbb{N}$. Si determini la distribuzione di $Y_n$ e si spieghi perché le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti.

(ii) Si determini la distribuzione di $S_n := Y_1 + \ldots + Y_n$.

(iii) Si calcoli la funzione di ripartizione di $Z_n := X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ e si deduca che $Z_n$ è una variabile aleatoria assolutamente continua. Se ne calcoli dunque la densità.

[*Sugg.* Si sfruttino i punti precedenti]

**Solution 1.14.** (i) Essendo

$$\mathrm{P}(Y_n \leq y) = \mathrm{P}(-\log(X_n) \leq y) = \mathrm{P}(X_n \geq e^{-y}) = 1 - F_{X_n}(e^{-y})\,,$$

segue che $Y_n$ è assolutamente continua con densità

$$f_{Y_n}(y) = f_{X_n}(e^{-y})e^{-y} = e^{-y}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\,,$$

ossia $Y_n \sim \text{Exp}(1) = \text{Gamma}(1,1)$. Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti perché funzioni delle singole variabili aleatorie indipendenti $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, per la Proposizione 3.40.

(ii) Segue dalle proprietà notevoli delle variabili Gamma (Proposizione 6.29) che $S_n \sim \text{Gamma}(n,1)$, ossia $f_{S_n}(s) = \frac{1}{(n-1)!}\, s^{n-1}\, e^{-s}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(s)$.

(iii) Dato che $Z_n \in [0,1]$, si ha che $F_{Z_n}(z) = 0$ se $z < 0$ e $F_{Z_n}(z) = 1$ se $z > 1$, mentre per $z \in (0,1)$

$$F_{Z_n}(z) = \text{P}(X_1 \cdots X_n \le z) = \text{P}(e^{-S_n} \le z) = \text{P}(S_n \ge -\log z) = 1 - F_{S_n}(-\log z)\,,$$

da cui segue che

$$f_{Z_n}(z) = F'_{Z_n}(z) = \frac{1}{z}\, f_{S_n}(-\log z) = \frac{1}{(n-1)!}(-\log z)^{n-1}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z)\,.$$

**Exercise 1.15.** Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $\text{U}(0,2)$ e sia

$$Y_n := \min\{Y_1,\ldots,Y_n\}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Sia $T \sim \text{Geo}(p)$ una variabile aleatoria indipendente dalle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e si ponga

$$Z := Y_T\,, \qquad \text{cioè} \qquad Z(\omega) := Y_{T(\omega)}(\omega)\,.$$

Si determini la funzione di ripartizione di $Z$, mostrando che è una variabile aleatoria assolutamente continua.

[*Sugg.* Si determini innanzitutto $\text{P}(Z \le x, T = n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.]

**Solution 1.15.** Dato che sull'evento $\{T = n\}$ si ha $Z = Y_n$, possiamo scrivere

$$\text{P}(Z \le z, T = n) \,=\, \text{P}(Y_n \le z, T = n) \,=\, \text{P}(Y_n \le z)\,\text{P}(T = n)\,.$$

avendo usato l'indipendenza di $Y_n$ e $T$. Ricordando la Proposizione 3.93, o con un calcolo diretto, otteniamo

$$\begin{aligned}\text{P}(Y_n \le z) &= \text{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\} \le z) \,=\, 1 - \text{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\} > z)\\ &= 1 - \text{P}(X_1 > z)\,\text{P}(X_2 > z)\cdots\text{P}(X_n > z) \,=\, 1 - (1-z)^n\,.\end{aligned}$$

Si osservi che $\text{P}(T = n) = p(1-p)^{n-1}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n)$. Possiamo ora calcolare la funzione di ripartizione di $Z$: dato che $Z$ assume valori in $[0,1]$, si ha $F_Z(z) = 0$ se $z < 0$ e $F_Z(z) = 1$ se $z > 1$, mentre per $z \in [0,1]$, osservando che gli eventi $\{T = n\}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ formano una partizione dello spazio di probabilità, si ottiene

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathrm{P}(Z \le z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(Z \le z, T = n) = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-(1-z)^n)(1-p)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} - p(1-z) \sum_{n=1}^{\infty} [(1-z)(1-p)]^{n-1} \\
&= 1 - \frac{p(1-z)}{1-(1-z)(1-p)} = \frac{z}{p+(1-p)z} \,,
\end{aligned}
$$

avendo usato la somma notevole della serie geometrica. Dato che $F_Z$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti, segue che $Z$ è assolutamente continua con densità

$$
f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{p}{(p+(1-p)z)^2} \mathbb{1}_{(0,1)}(z) \,.
$$

**Exercise 1.16.** Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$. , definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Introduciamo la variabile aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e, per $k \in \mathbb{N}$, l'evento $A_k$ definiti da

$$
T(\omega) := \inf\left\{ k \ge 1 : \; X_k(\omega) \le \frac{1}{3} \right\}, \qquad A_k = \left\{ X_k \le \frac{1}{3} \right\}.
$$

Definiamo quindi la variabile aleatoria

$$
Y := X_T \, \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \,,
$$

cioè $Y(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ se $T(\omega) < \infty$, mentre $Y(\omega) := 0$ altrimenti.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini degli eventi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Si deduca la distribuzione di $T$.

(ii) Si determini la distribuzione di $Y$.

[*Sugg.* Si calcoli $\mathrm{P}(Y \le x, T = n)$ per $n \in \mathbb{N}$.]

**Solution 1.16.** (i) Per definizione si ha l'uguaglianza di eventi

$$
\{T = n\} = \left(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c\right) \cap A_n \,. \tag{1.7}
$$

Gli eventi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti, perché le variabili aleatorie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti. Dato che $\mathrm{P}(A_k) = \frac{1}{3}$ (perché?), segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$
\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(A_1^c)\,\mathrm{P}(A_2^c) \cdots \mathrm{P}(A_{n-1}^c)\,\mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} ,
$$

ossia $T \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{3})$.

(ii) Si noti che per $x \in [0,1]$

$$
\mathrm{P}(Y \le x, T = n) = \mathrm{P}(X_T \le x, T = n) = \mathrm{P}(X_n \le x, T = n) \,,
$$

e applicando la relazione (1.7) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P(Y \le x, T = n) &= P\left(X_1 > \tfrac{1}{3}, X_2 > \tfrac{1}{3}, \dots, X_{n-1} > \tfrac{1}{3}, X_n \le \tfrac{1}{3}, X_n \le x\right) \\ &= P\left(X_1 > \tfrac{1}{3}, X_2 > \tfrac{1}{3}, \dots, X_{n-1} > \tfrac{1}{3}, X_n \le \min\{\tfrac{1}{3}, x\}\right). \end{aligned}$$

Usando il fatto che le variabili aleatorie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d., si ottiene

$$P(Y \le x, T = n) = P\left(X_1 > \tfrac{1}{3}\right)^{n-1} P\left(X_1 \le \min\{\tfrac{1}{3}, x\}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \min\left\{\frac{1}{3}, x\right\}.$$

Di conseguenza, per $x \in [0,1]$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \le x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(Y \le x, T = n) = \min\left\{\frac{1}{3}, x\right\} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \min\left\{\frac{1}{3}, x\right\} \cdot 3 = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{3} \le x \le 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dato che $F_Y(x) = 0$ se $x < 0$ e $F_Y(x) = 1$ se $x > 1$, la funzione $F_Y$ è $\mathscr{C}^1$ a tratti e pertanto $Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 3\,\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{3})}(x),$$

ossia $Y \sim U(0, \frac{1}{3})$. In altri termini, abbiamo mostrato che una variabile aleatoria con distribuzione $U(0, \frac{1}{3})$ può essere ottenuta a partire da una successione di variabili aleatorie i.i.d. $U(0,1)$, considerando la prima di tali variabili aleatorie che assume valore minore o uguale a $\frac{1}{3}$.

**Exercise 1.17.** Siano $X$ e $Y$ variabile aleatorie real indipendenti. Supponiamo che $X$ sia assolutamente continua, con densità $f_X$, mentre $Y$ sia discreta, con densità discreta $p_Y$. Supponiamo inoltre che $Y$ assuma solo un numero finito di valori, cioè l'insieme $Y(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : p_Y(x) > 0\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ è finito.

(i) Si esprima la funzione di ripartizione di $Z := X + Y$ in termini di $f_X$ e $p_Y$.

(ii) Si mostri che $Z$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, determinandone la densità in funzione di $f_X$ e $p_Y$.

**Solution 1.17.** (i) Sia $\{y_1, \dots, y_n\}$ l'insieme dei valori assunti da $Y$. Dato che gli eventi $\{Y = x_k\}$ al variare di $k \in \{1, \dots, n\}$ formano una partizione dello spazio di probabilità, per ogni $t \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P(X + Y \le t) &= \sum_{k=1}^{n} P(X \le t - x_k, Y = x_k) = \sum_{k=1}^{n} p_Y(x_k) \int_{-\infty}^{t-x_k} f_X(x)\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_Y(x_k) \int_{-\infty}^{t} f_X(x - x_k)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{t} \left( \sum_{k=1}^{n} f_X(x - x_k)\, p_Y(x_k) \right) dx. \end{aligned} \tag{1.8}$$

(ii) La relazione (1.8) mostra che la funzione di ripartizione $F_{X+Y}(t)$ della variabile aleatoria $X+Y$ è data da

$$F_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{dove} \qquad f(x) := \sum_{k=1}^{n} f_X(x-x_k)\,\mathrm{p}_Y(x_k).$$

Questo significa che la variabile aleatoria $X+Y$ è assolutamente continua, con densità $f_{X+Y}(x) = f(x)$.

**Exercise 1.18.** L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. I tempi di attesa $T_1$ e $T_2$ per parlare con l'operatore sono, per entrambi i numeri, variabili aleatorie esponenziali, con media $\mu = 15$ minuti. Inoltre $T_1$ e $T_2$ si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che risponderà per primo.

(i) Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?
(ii) Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

**Solution 1.18.** (i) Per ipotesi sia $T_1$ che $T_2$ hanno distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$ con $\lambda = 1/15$ (perché il valor medio di una $\mathrm{Exp}(\lambda)$ vale $1/\lambda$). Il tempo che occorre attendere per la risposta è dato da $T = \min(T_1, T_2)$ che ha distribuzione $\mathrm{Exp}(2/15)$, per quanto visto nell'Esempio 6.32. Da ciò segue che $\mathrm{E}(T) = 15/2$.

(ii) Ricordando che se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ si ha $\mathrm{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ per ogni $t \geq 0$, si ottiene

$$\mathrm{P}(T \leq 5) = 1 - \mathrm{P}(T > 5) = 1 - e^{-\frac{2}{15}5} = 1 - e^{-2/3} \simeq 0.49.$$

**Exercise 1.19.** Un congegno elettronico è costituito da $n$ componenti collegate in serie: esso smette di funzionare non appena una qualsiasi delle sue componenti si rompe. I tempi di vita $T_1, T_2, \dots, T_n$ delle $n$ componenti sono variabili aleatorie reali indipendenti e con la stessa distribuzione assolutamente continua, di cui indichiamo con $f$ la densità. Chiaramente $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ (i tempi sono quantità positive!). Supponiamo che $f$ sia una funzione continua su $[0,\infty)$, con $f(0) > 0$. Indicando con $X_n$ il tempo di vita dell'intero dispositivo, si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = 0$$

**Solution 1.19.** Per costruzione si ha $X_n = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$, pertanto

$$\mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = \mathrm{P}(T_1 > \varepsilon, T_2 > \varepsilon, \dots, T_n > \varepsilon) = \mathrm{P}(T_1 > \varepsilon)^n, \tag{1.9}$$

avendo usato il fatto che le variabili aleatorie $T_1, T_2, \dots, T_n$ sono i.i.d.. Si osservi che

$$\mathrm{P}(T_1 > \varepsilon) = 1 - \mathrm{P}(T_1 \leq \varepsilon) = 1 - \int_0^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

Dal fatto che $f(0) > 0$ e dalla continuità di $f$ segue che esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > \frac{1}{2} f(0)$ per ogni $x \in [0, \delta]$. In particolare, per ogni $\varepsilon \in (0, \delta)$ si ha che

$$\int_0^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{2} f(0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f(0)\,\varepsilon > 0 .$$

L'integrale è una funzione crescente di $\varepsilon$, quindi a maggior ragione $\int_0^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ per $\varepsilon \geq \delta$. In definitiva, $\int_0^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$; segue quindi da (1.10) che $\mathrm{P}(T_1 > \varepsilon) < 1$ e dunque $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = 0$, grazie a (1.9).

**Exercise 1.20.** Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie i.i.d., con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$, e definiamo

$$L_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \qquad Z_n := n L_n .$$

Si mostri che la funzione di ripartizione $F_{Z_n}(t)$ converge per $n \to \infty$ verso un limite $F(t)$, che è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $\mathrm{Exp}(1)$.

**Solution 1.20.** Per $x \in [0,1]$ si ha $\mathrm{P}(L_n > x) = \mathrm{P}(X_1 > x)^n = (1-x)^n$, quindi

$$F_{L_n}(x) = 1 - (1-x)^n ,$$

mentre chiaramente $F_{L_n}(x) = 0$ se $x \leq 0$ e $F_{L_n}(x) = 1$ se $x \geq 1$.

Per ogni $t \geq 0$ fissato, si ha che $t/n \in [0,1]$ per $n$ grande e dunque

$$F_{Z_n}(t) = \mathrm{P}(Z_n \leq t) = \mathrm{P}(L_n \leq \tfrac{t}{n}) = 1 - (1 - \tfrac{t}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-t} .$$

Per $t < 0$ si ha $F_{Z_n}(t) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = 0$. In definitiva,

$$F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases},$$

che è proprio la funzione di ripartizione della distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$.

**Exercise 1.21.** Ricordiamo che una variabile aleatoria reale $X$ è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Può essere utile ricordare che $\arctan(z) + \arctan(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$, per ogni $z \in \mathbb{R}$.

(i) Si dimostri che la variabile aleatoria $Y := 1/X$ è di Cauchy.

(ii) Si calcoli $\mathrm{P}(X > z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ e si mostri che per $z \to +\infty$

$$\mathrm{P}(X > z) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{z},$$

intendendo che il rapporto dei due membri tende a 1 per $z \to +\infty$.

(iii) Sia ora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. di variabili di Cauchy indipendenti e si definisca $M_n := \max\{X_1,\dots,X_n\}$ per $n\in\mathbb{N}$. Si mostri che per ogni $t>0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{n}\le t\right) \,=\, \exp\left(-\frac{1}{\pi}\frac{1}{t}\right).$$

**Solution 1.21.** (i) Si noti che la funzione di ripartizione di $X$ è data da

$$\begin{aligned} F_X(x) \,&=\, \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \,=\, \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \,=\, \frac{1}{\pi}\arctan(t)\Big|_{t=-\infty}^{t=x} \\ &=\, \frac{1}{\pi}\big(\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\big) \,=\, \frac{1}{\pi}\arctan(x)+\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di $Y$. Per $y<0$ si ha $\frac{1}{x}\le y$ se e solo se $\frac{1}{y}\le x<0$, pertanto

$$\begin{aligned} F_Y(y) \,&=\, \mathrm{P}(Y\le y) \,=\, \mathrm{P}\left(\frac{1}{X}\le y\right) \,=\, \mathrm{P}\left(\frac{1}{y}\le X<0\right) \,=\, \mathrm{P}(X\le 0)-\mathrm{P}\left(X<\frac{1}{y}\right) \\ &=\, \frac{1}{2}-\mathrm{P}\left(X\le\frac{1}{y}\right) \,=\, \frac{1}{2}-F_X\left(\frac{1}{y}\right) \,=\, -\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\arctan(\frac{1}{y}) = -\arctan(-\frac{1}{y})$. Applicando la formula $\arctan(z)+\arctan(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$, valida per $z>0$, a $z=-1/y$ si ottiene dunque

$$F_Y(y) \,=\, \frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{1}{y}\right) \,=\, \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(-y)\right) \,=\, \frac{1}{2}+\arctan(y) \,=\, F_X(y).$$

Consideriamo ora il caso in cui $y>0$. In questo caso si ha $\frac{1}{x}\le y$ se e solo se $x\le 0$ oppure $x\ge\frac{1}{y}$, pertanto

$$\begin{aligned} F_Y(y) \,&=\, \mathrm{P}(Y\le y) \,=\, \mathrm{P}\big(\tfrac{1}{X}\le y\big) \,=\, \mathrm{P}\big(\{X\le 0\}\cup\{X\ge\tfrac{1}{y}\}\big) \\ &=\, \mathrm{P}(X\le 0)+\mathrm{P}\big(X\ge\tfrac{1}{y}\big) \,=\, \frac{1}{2}+\big(1-\mathrm{P}\big(X<\tfrac{1}{y}\big)\big) \\ &=\, \tfrac{3}{2}-F_X\big(\tfrac{1}{y}\big) \,=\, 1-\tfrac{1}{\pi}\arctan\big(\tfrac{1}{y}\big) \,=\, 1-\tfrac{1}{\pi}\big(\tfrac{\pi}{2}-\arctan(y)\big) \\ &=\, \tfrac{1}{2}-\arctan(y) \,=\, F_X(y). \end{aligned}$$

Dato che $F_Y(0) = \mathrm{P}(Y\le 0) = \mathrm{P}(X\le 0) = F_X(0)$, abbiamo mostrato che $F_Y(y) = F_X(y)$ per ogni $y\in\mathbb{R}$. Avendo la stessa funzione di ripartizione, le variabili aleatorie $X$ e $Y$ hanno la stessa distribuzione, pertanto $Y$ è di Cauchy.

(ii) Applicando (1.11) per $x>0$ e sfruttando la relazione $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione arcotangente, $\arctan(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, si ottiene la relazione cercata.

(iii) La funzione di ripartizione della variabile aleatoria $M_n$ è data da

$$\begin{aligned} F_{M_n}(z) &= P(M_n \le z) = P(X_1 \le z, X_2 \le z, \dots, X_n \le z) = P(X_1 \le z)^n \\ &= \big(1 - P(X_1 > z)\big)^n = \left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)^n \\ &= \exp\left\{n \log\left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right\} \qquad \text{per } z \to +\infty, \end{aligned}$$

avendo usato il punto precedente. Ricordando lo sviluppo di Taylor del logaritmo $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, per $t > 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n}{n} \le t\right) &= F_{M_n}(nt) = \exp\left\{n \log\left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{nt} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{n\left(-\frac{1}{\pi}\frac{1}{nt} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\pi t}\right\}. \end{aligned}$$

**Exercise 1.22.** Sia $\varphi : [0,+\infty) \to [0,1)$ una funzione continua, crescente, tale che $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = 1$, e il cui comportamento asintotico per $x \downarrow 0$ è dato da

$$\varphi(x) = \alpha x^k + o(x^k), \qquad \text{con } \alpha, k > 0.$$

(i) Si mostri che la funzione $F(t) := 1 - \varphi(1/t)$ è una funzione di ripartizione, ossia soddisfa le proprietà 5.4.

(ii) Si consideri una successione $(X_n)_{n\ge1}$ di variabili aleatorie i.i.d. con funzione di ripartizione $F$ definita sopra. Ponendo

$$Y_n := \frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n)}{n^{1/k}},$$

si mostri che, per ogni $y > 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \le y) = e^{-\alpha/y^k}.$$

**Solution 1.22.** (i) Dato che $\varphi$ è crescente, la funzione $(0,\infty) \ni t \mapsto \varphi(1/t)$ è decrescente e dunque la funzione $F(t) = 1 - \varphi(1/t)$ è crescente sulla semiretta $(0,\infty)$; inoltre è continua, perché composizione di funzioni continue. Dato che $F(0+) = \lim_{t\downarrow0} F(t) = 1 - \lim_{s\uparrow+\infty}\varphi(s) = 1 - 1 = 0$ ed essendo $F(t) = 0$ per $t \le 0$, segue che $F$ è crescente e continua su $\mathbb{R}$. Infine, chiaramente $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ mentre $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1 - \lim_{s\downarrow 0} \varphi(s) = 1 - 0 = 1$, pertanto tutte le proprietà 5.4 di una funzione di ripartizione sono soddisfatte.

(ii) Per $y > 0$ si ha

$$\begin{aligned} P(Y_n \le y) &= P(X_1 \le n^{1/k}y, X_2 \le n^{1/k}y, \dots, X_n \le n^{1/k}y) = P(X_1 \le n^{1/k}y)^n \\ &= F_X(n^{1/k}y)^n = \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{n^{1/k}y}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\alpha}{ny^k} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left\{n \log\left(1 - \frac{\alpha}{ny^k} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha}{y^k}\right\}, \end{aligned}$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$.

**Exercise 1.23.** Un lanciatore di giavellotto esegue $n \in \mathbb{N}$ lanci. Detta $X_i$ la distanza ottenuta nell'$i$-esimo lancio, supponiamo che $X_1, \dots, X_n$ siano variabili aleatorie i.i.d. con $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dove $\lambda \in (0,\infty)$. Indichiamo con $M_n$ la massima distanza a cui è stato lanciato il giavellotto.

(i) Sia $W_n := \frac{M_n}{\log(n)}$ e $F_{W_n}$ la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{\lambda} \\ e^{-1} & \text{se } x = \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{\lambda} \end{cases}.$$

(ii) Si deduca che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(iii) Definiamo ora

$$Z_n := M_n - \frac{1}{\lambda}\log n,$$

e sia $F_{Z_n}(t)$ la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che il limite $F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t)$ esiste, e lo si determini, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che $F$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria assolutamente continua.

**Solution 1.23.** (i) Dato che $f_{X_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$, si ottiene

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_1}(t)\,\mathrm{d}t = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x). \tag{1.12}$$

Di conseguenza $F_{W_n}(w) = 0$ se $w \le 0$, mentre per $w > 0$, ricordando lo sviluppo di Taylor $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
F_{W_n}(w) &= \mathrm{P}(W_n \le w) = \mathrm{P}(M_n \le w \log n) = \mathrm{P}(X_1 \le w \log n, X_n \le w \log n) \\
&= \mathrm{P}(X_1 \le w \log n)^n = F_{X_1}(w \log n)^n = \left(1 - e^{-\lambda w \log n}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda w}}\right)^n = \exp\left\{ n \log\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda w}}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{ n\left( -\frac{1}{n^{\lambda w}} + o\left(\frac{1}{n^{\lambda w}}\right)\right)\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{se } w < \frac{1}{\lambda} \\ e^{-1} & \text{se } w = \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } w > \frac{1}{\lambda} \end{cases} .
\end{aligned}
$$

(ii) Possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{\log(n)} > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{\log(n)} < \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) \\
&= 1 - F_{W_n}\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) + F_{W_n}\left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 1 - 1 + 0 = 0 .
\end{aligned}
$$

(iii) Ricordando (1.12) si ha

$$
\begin{aligned}
F_{Z_n}(t) &= \mathrm{P}(Z_n \le t) = \mathrm{P}\left(M_n \le \frac{1}{\lambda}\log n + t\right) = F_{X_1}\left(\frac{1}{\lambda}\log n + t\right)^n \\
&= \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}\log n + t)}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-\lambda t}\right)^n & \text{se } t > -\frac{1}{\lambda}\log n \\ 0 & \text{se } t \le -\frac{1}{\lambda}\log n \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, si ha $t > -\frac{1}{\lambda}\log n$ per $n$ sufficientemente grande. Dato che $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{c}{n})^n = e^{-c}$, come segue dallo sviluppo di Taylor del logaritmo sopra richiamato, ricaviamo il limite

$$
F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}e^{-\lambda t}\right)^n = e^{-e^{-\lambda t}} ,
$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Osserviamo che la funzione $F(t)$ appena determinata è crescente e continua su tutto $\mathbb{R}$ e inoltre $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. Essendo verificate le proprietà 5.4, segue che $F$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria reale. Inoltre, essendo $F$ di classe $\mathscr{C}^1$ (in realtà $\mathscr{C}^\infty$), segue dalla Proposizione 6.16 che la variabile aleatoria di cui $F$ è funzione di ripartizione è assolutamente continua, con densità

$$
f(t) = F'(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}\, e^{-e^{-\lambda t}} .
$$

**Exercise 1.24.** Pietro è un lanciatore di giavellotto. Dopo un lancio iniziale, in cui manda il giavellotto a una distanza $X_0$, si cimenta in una successione di lanci ripetuti: nel lancio $n$-esimo il giavellotto cade a una distanza $X_n$. Pietro si interroga su quanti lanci $T$ debba fare per migliorare il risultato iniziale, ossia

$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n > X_0\}.$$

Assumiamo che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ siano variabili aleatorie indipendenti e (ignorando l'effetto della fatica) con la stessa distribuzione, che supponiamo assolutamente continua. Mostreremo che $T$ *ha una distribuzione "universale", che non dipende dalla distribuzione delle* $X_k$, con densità discreta

$$\mathrm{p}_T(k) = \frac{1}{k(k+1)} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k), \tag{1.13}$$

da cui segue che il numero di lanci richiesti per migliorarsi ha media $\mathrm{E}(T) = +\infty$! (Aver ignorato la fatica rende questo risultato ancora più sorprendente.)

(i) Definendo gli eventi

$$A_k^{(n)} := \left\{X_k = \max_{0\le i\le n} X_i\right\}, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},\ k \in \{0,\dots,n\},$$

si mostri, con un argomento di simmetria, che

$$\mathrm{P}\left(A_0^{(n)}\right) = \mathrm{P}\left(A_1^{(n)}\right) = \dots = \mathrm{P}\left(A_n^{(n)}\right).$$

(ii) Si mostri che per ogni $i \neq j$ si ha $\mathrm{P}(X_i \neq X_j) = 1$.

[*Sugg.* Si noti che $X_i - X_j$ è una variabile reale assolutamente continua (perché?).]

(iii) Si spieghi l'inclusione di eventi $A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} \subseteq \{X_i = X_j\}$ e si deduca che

$$\mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right) = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

(iv) Si spieghi perché $\bigcup_{k=0}^n A_k^{(n)} = \Omega$ e si deduca che

$$\mathrm{P}(A_k^{(n)}) = \frac{1}{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n.$$

[*Sugg.* Si ricordi l'Esercizio 1.4 del fascicolo I.]

(v) Si spieghi perché $\{T > n\} = A_0^{(n)}$ e, dunque, $\mathrm{P}(T > n) = \frac{1}{n+1}$. Si deduca la formula (1.13) e il fatto che $\mathrm{E}(T) = +\infty$.

**Solution 1.24.** (i) Intuitivamente, gli eventi $A_k^{(n)}$ al variare di $k \in \{0,1,\dots,n\}$ sono ottenuti semplicemente permutando le variabili aleatorie $X_0, X_1, \dots, X_n$; ma qualunque permutazione ha la stessa distribuzione, perché le variabili sono i.i.d., pertanto gli eventi $A_k^{(n)}$ hanno la stessa probabilità.

Più formalmente, definendo $Z_k := X_k - \max_{0\le i\le n} X_i$, possiamo scrivere $A_k^{(n)} = \{Z_k = 0\}$, pertanto $\mathrm{P}(A_k^{(n)}) = \mathrm{P}(Z_k = 0) = \mu_{Z_k}(\{0\})$, indicando con $\mu_{Z_k}$ la distribuzione di $Z_k$. Ci basta allora mostrare che le variabili aleatorie $Z_k$ e $Z_{k'}$, per ogni scelta di $k,k' \in \{0,1,\dots,n\}$, hanno la stessa distribuzione. Ponendo $Y := \max_{0\le i\le n} X_i$ e $f(x,y) := x - y$, possiamo scrivere

$Z_k = f(X_k, Y)$ e $Z_{k'} = f(X_{k'}, Y)$, pertanto ci basta mostrare che i vettori aleatori bidimensionali $(X_k, Y)$ e $(X_{k'}, Y)$ hanno la stessa distribuzione, grazie alla Proposizione **??** (conservazione della distribuzione). Infine, introducendo la funzione $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(x_0, x_1, \ldots, x_n) := (x_0, \max_{0 \le i \le n} x_i)$ e la permutazione (trasposizione) $\pi_k : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ definita da $\pi_k(0) := k$, $\pi_k(k) = 0$ e $\pi_k(i) = i$ se $i \neq 0$, $i \neq k$, possiamo scrivere $(X_k, Y) = g(\pi_k(X_0, \ldots, X_n))$ e $(X_{k'}, Y) = g(\pi_{k'}(X_0, \ldots, X_n))$; ancora per conservazione della distribuzione, ci basta mostrare che i vettori aleatori $(n+1)$-dimensionali $\pi_k(X_0, \ldots, X_n)$ e $\pi_{k'}(X_0, \ldots, X_n)$ hanno la stessa distribuzione, e ciò segue dal fatto che entrambi i vettori hanno componenti indipendenti e con la stessa densità.

(ii) Per $i \neq j$, le variabili aleatorie $X_i$ e $-X_j$ sono indipendenti e assolutamente continue, pertanto la loro somma $X_i - X_j$ è una variabile aleatoria assolutamente continua (Proposizione 6.25). Di conseguenza, $\mathrm{P}(X_i - X_j = 0) = 0$.

(iii) Se $\omega \in A_i^{(n)}$, allora per definizione $X_i(\omega) = \max_{0 \le \ell \le n} X_\ell(\omega)$; analogamente, se $\omega \in A_j^{(n)}$, si ha $X_j(\omega) = \max_{0 \le \ell \le n} X_\ell(\omega)$. In particolare, se $\omega \in A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}$, si ha $X_i(\omega) = X_j(\omega)$. Questo mostra l'inclusione $A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} \subseteq \{X_i = X_j\}$, da cui segue che
$$\mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right) \le \mathrm{P}(X_i = X_j) = 0 .$$
Pertanto $\mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right) = 0$ per $i \neq j$.

(iv) Per ogni $\omega \in \Omega$, i numeri reali $\{X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$ hanno un massimo, che indichiamo con $X_{\bar{k}}(\omega)$, dove l'indice $\bar{k} = \bar{k}(\omega) \in \{0, 1, \ldots, n\}$ è definito come il più piccolo per cui viene assunto il massimo (nel caso in cui venga assunto da più di un numero). In particolare, $X_{\bar{k}}(\omega) = \max_{0 \le i \le n} X_i(\omega)$, il che significa che $\omega \in A_{\bar{k}}^{(n)}$. Abbiamo dunque mostrato che ogni $\omega \in \Omega$ appartiene a un insieme $A_k^{(n)}$, per un'opportuna scelta di $k \in \{0, \ldots, n\}$, ossia $\bigcup_{k=0}^n A_k^{(n)} = \Omega$. Da questa relazione, per subadditività, segue che
$$1 = \mathrm{P}(\Omega) \le \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right).$$
Applicando la disuguaglianza di Bonferroni (Esercizio 1.4 del fascicolo I, otteniamo
$$1 = \mathrm{P}(\Omega) \ge \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right) - \sum_{0 \le i < j \le n} \mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right).$$
Ma abbiamo già mostrato che $\mathrm{P}\left(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\right)$ se $i < j$. Segue dunque dalle relazioni precedenti che
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right).$$
Infine, dato che gli eventi $\mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right)$ hanno tutti la stessa probabilità al variare di $k$, segue che $\mathrm{P}\left(A_k^{(n)}\right) = \frac{1}{n+1}$, come richiesto.

(v) Per definizione, si ha $\omega \in \{T > n\}$ se e solo se $T(\omega) > n$, ossia $X_k(\omega) \le X_0(\omega)$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$; in altri termini, $\omega \in \{T > n\}$ se e solo se $X_0(\omega) = \max_{0 \le i \le n} X_i(\omega)$, cioè se e solo se $\omega \in A_0^{(n)}$. Questo mostra che $\{T > n\} = A_0^{(n)}$, da cui segue che $\mathrm{P}(T > n) = \mathrm{P}(A_0^{(n)}) = \frac{1}{n+1}$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(T = k) = \mathrm{P}(T > k-1) - \mathrm{P}(T > k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)},$$

ottenendo la formula (1.13). Segue in particolare che

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k\, \mathrm{P}(T = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

**Exercise 1.25.** Siano $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $\mathrm{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(i) Si mostri che le variabili aleatorie $(Y_n := X_n + \frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}}$ sono i.i.d. $\mathrm{U}(0,1)$. Lo stesso per le variabili aleatorie $(Z_n := \frac{1}{2} - X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) Applicando l'Esercizio 1.20, si deduca che per ogni $r > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\Big( \min\{X_1, \ldots, X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{r}{n} \Big) = 1 - e^{-r}.$$
$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\Big( \max\{X_1, \ldots, X_n\} > \tfrac{1}{2} - \tfrac{r}{n} \Big) = 1 - e^{-r}.$$

Si deduca che esistono $\bar{r} > 0$ e $n_0 < \infty$ tale che per ogni $n > n_0$

$$\mathrm{P}\bigg( \min\{X_1, \ldots, X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\bar{r}}{n},\ \max\{X_1, \ldots, X_n\} > \tfrac{1}{2} - \tfrac{\bar{r}}{n} \bigg) \ge 0.99.$$

[*Sugg.* Si scelga $\bar{r} > 0$ tale che $e^{-\bar{r}} < 0.005$ e si ricordi che $\mathrm{P}(A \cup B) \le \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.]

(iii) Introduciamo per $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ il sottoinsieme $C_n(\delta) \subseteq \mathbb{R}^n$ definito da

$$C_n(\delta) := \big( -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \big)^n \setminus \big( -\tfrac{1}{2} + \delta, \tfrac{1}{2} - \delta \big)^n,$$

che rappresenta la "buccia interna" di spessore $\delta$ del cubo $n$-dimensionale $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$. Si mostri che per $n > n_0$

$$\mathrm{P}\big( (X_1, \ldots, X_n) \in C_n\big(\tfrac{\bar{r}}{n}\big) \big) \ge 0.99.$$

**Solution 1.25.** (i) Le variabili aleatorie $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono i.i.d. perché sono ottenute a partire da variabili aleatorie indipendenti applicando la stessa funzione $x \mapsto x + \frac{1}{2}$, per le Proposizioni **??** e **??**. La verifica che siano $\mathrm{Unif}(0,1)$ è facile: chiaramente $Y_n$ assume valori in $(0,1)$, visto che $X_n$ assume valori in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e per $y \in (0,1)$ si ha

$$F_{Y_n}(y) = \mathrm{P}(Y_n \le y) = \mathrm{P}(X_n \le y - \tfrac{1}{2}) = F_{X_n}(y - \tfrac{1}{2}) = (y - \tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{2}) = y.$$

(ii) Basta notare che

$$\left\{ \min\{X_1,\ldots,X_n\} < -\tfrac{1}{2}+\tfrac{r}{n} \right\}^c = \left\{ \min\{Y_1,\ldots,Y_n\} < \tfrac{r}{n} \right\}^c = \left\{ Y_1 \geq \tfrac{r}{n},\ldots,Y_n \geq \tfrac{r}{n} \right\},$$

da cui segue che

$$\mathrm{P}\left( \min\{X_1,\ldots,X_n\} < -\tfrac{1}{2}+\tfrac{r}{n} \right) = 1-\left(1-\tfrac{r}{n}\right)^n \to 1-e^{-r} \qquad \text{per } n\to\infty.$$

Scelto $\bar{r}$ tale che $e^{-\bar{r}} < 0.01$, si ha $1-e^{-\bar{r}} > 0.99$ e, per definizione di limite, esiste $n_0 < \infty$ con la proprietà richiesta.

(iii) Basta osservare che vale l'inclusione di eventi

$$\left\{ \min\{X_1,\ldots,X_n\} < -\tfrac{1}{2}+\tfrac{\bar{r}}{n} \right\} \subseteq \left\{ (X_1,\ldots,X_n) \in C_n\left(\tfrac{\bar{r}}{n}\right) \right\},$$

perché un vettore $x = (x_1,\ldots,x_n)$ con componenti in $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ è tale che $\min\{x_1,\ldots,x_n\} - \frac{1}{2} + \delta$ se e solo se esiste $x_i \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+\delta)$, e in questo caso chiaramente $x \in C_n(\delta)$. La conclusione segue dalla monotonia della probabilità.

**Exercise 1.26.** Sia $X$ una variabile aleatoria reale, con funzione di ripartizione

$$F(x) = e^{-e^{-x}}.$$

(i) Si determini la distribuzione della variabile aleatoria $Y := e^{-X}$.

(ii) Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili i.i.d. con distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$, e sia $M_n := \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Definiamo inoltre $\xi_n := M_n - \log(n)$, e si denoti con $F_{\xi_n}$ la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\xi_n}(t) = F(t).$$

(iii) Sia $Z_n := \frac{M_n}{\log(n)}$, e $F_{Z_n}$ la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<1 \\ e^{-1} & \text{se } x=1 \\ 1 & \text{se } x>1 \end{cases}$$

e si deduca che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left( \left| \frac{M_n}{\log(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

**Solution 1.26.** a. Chiaramente $P(Y \leq y) = 0$ se $y \leq 0$. Per $y > 0$

$$P(Y \leq y) = P(X \geq -\log y) = 1 - F_X(-\log y) = 1 - e^{-y},$$

cioè $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

b.

$$F_{\xi_n}(t) = P(M_n \le t + \log n) = [P(X_1 \le t + \log n)]^n$$
$$= \begin{cases} (1 - e^{-t-\log n})^n = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n & \text{se } t \ge -\log n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

da cui segue facilmente la conclusione.

c. Per $t > 0$
$$F_{Z_n}(t) = P(M_n \le t \log n) = \left(1 - \frac{1}{n^t}\right)^n.$$
Essendo
$$\log F_{Z_n}(t) = n \log\left(1 - \frac{1}{n^t}\right) = -n\left(\frac{1}{n^t} + o\left(\frac{1}{n^t}\right)\right)$$
si calcola facilmente $\lim_{n\to+\infty} F_{\xi_n}(t)$. Inoltre
$$P\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) = F_{Z_n}(1-\varepsilon) + 1 - F_{Z_n}(1+\varepsilon).$$
Passando al limite $n \to +\infty$ si conclude.