Capitolo 1

1.1 Parte IX

Exercise 1.1. Sia X una variabile aleatoria reale assolutamente continua e sia (a,b) un intervallo aperto (limitato o illimitato) di $\mathbb{R}$, tale che $\mathrm{P}(X \in (a,b)) = 1$. Sia $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^1$ tale che $\varphi'(x) > 0$ (oppure < 0) per ogni $x \in (a,b)$. Allora l'immagine di φ è un intervallo aperto (c,d). L'obiettivo di questo esercizio è di mostrare che la variabile aleatoria $Y := \varphi(X)$ è assolutamente continua, con densità

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right) \mathbb{1}_{(c,d)}(y)\,, \tag{1.1}$$

dove $\varphi^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ indica la funzione inversa di φ.

Si consideri solo il caso $\varphi'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$ (il caso $\varphi'(x) < 0$ è analogo).

(i) Si mostri che la funzione di ripartizione di Y è data da

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq c \\ F_X(\varphi^{-1}(y)) & \text{se } c < y < d \\ 1 & \text{se } y \geq d \end{cases}$$

(ii) Assumendo che F_X sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, si concluda che Y è assolutamente continua, con densità f_Y data da (1.1).

(iii) Si giunga alla stessa conclusione senza assumere che F_X sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, usando la formula di cambio di variabili 6.12 delle dispense.

Exercise 1.2. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie reali indipendenti, con la stessa distribuzione. Indicando con $F = F_{X_i}$ la comune funzione di ripartizione, facciamo l'ipotesi che F sia $\mathscr{C}^1$ a tratti, così che $f(x) = F'(x)$ è la densità delle X_i.

Si mostri che $Z := \max(X_1, \ldots, X_n)$ e $W := \min(X_1, \ldots, X_n)$ sono variabili aleatorie assolutamente continue, con densità

$$f_Z(x) = n\big(F(x)\big)^{n-1} f(x)\,, \qquad f_W(x) = n\big(1 - F(x)\big)^{n-1} f(x)\,. \qquad \textbf{(??)}$$

Exercise 1.3. Data una variabile aleatoria $X \sim \mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$, si mostri che $Y := \cos(X)$ è una variabile assolutamente continua e se ne determini la densità.

Exercise 1.4. Sia X un punto scelto uniformemente nell'intervallo $[0,2]$. Qual è la probabilità che il triangolo equilatero di lato X abbia area maggiore di 1?

Exercise 1.5. Sia $X \sim \mathrm{U}(0,1)$ e sia $Y := 4X(1-X)$.

(i) Si determini la funzione di ripartizione di Y, si deduca che la variabile Y è assolutamente continua e se ne calcoli la densità.

(ii) Si calcoli $\mathrm{Cov}(X,Y)$ (che è ben definita: perché?).

Exercise 1.6. Sia X una variabile aleatoria reale assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = -\log(x^c)\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

(i) Si determini il valore di $c \in \mathbb{R}$ affinché f_X sia effettivamente una densità, e si determini la funzione di ripartizione di X.

(ii) Sia $Y = -\log X$. Si mostri che $Y \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$, determinando α e λ.

Exercise 1.7. Sia $X \sim \mathrm{U}(-1,1)$. Si determini la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Y := X^+ = \max(X,0)$. Si deduca che la distribuzione di Y non è né discreta né assolutamente continua.

Exercise 1.8. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := 3x^2\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,.$$

Si considerino le variabili aleatorie

$$A := -\log X\,, \qquad B := \min\{1, A\}\,.$$

(i) Si calcoli la funzione di ripartizione della variabile aleatoria A e se ne identifichi la distribuzione (notevole).

(ii) Consideriamo la seguente equazione di secondo grado per l'incognita x, con coefficienti determinati dalla variabile aleatoria A:

$$x^2 + 3Ax + 2A^2 + 4 = 0\,.$$

Qual è la probabilità che l'equazione non ammetta soluzioni reali?

(iii) Si calcoli la funzione di ripartizione di B e si deduca che B non è una variabile aleatoria assolutamente continua. B è una variabile aleatoria discreta?

Exercise 1.9. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$ e sia

$$Z := \frac{1}{X^r}\,,$$

con $r \in \mathbb{R}$ parametro fissato.

(i) Per quali valori di $p \in (0,\infty)$ si ha $\mathrm{E}(|Z|^p) < \infty$, ossia $Z \in L^p$?

(ii) Si determini la distribuzione della variabile aleatoria Z.

[*Sugg.* Si calcoli la funzione di ripartizione di Z, separando i casi $r < 0$, $r = 0$ e $r > 0$.]

Exercise 1.10. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite nell'intervallo $(-1,+1)$. Si mostri che $Z := X+Y$ è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Z(z) = \frac{1}{4}(2-|z|)\,\mathbb{1}_{(-2,+2)}(z)\,.$$

Exercise 1.11. Siano X,Y variabili aleatorie indipendenti, entrambe con distribuzione $\mathrm{Exp}(1)$, e si definisca $Z := X - Y$.

(i) Si mostri che Z è una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}\,.$$

[*Sugg.* Si ponga $Y' := -Y$, così che $Z = X + Y'$.]

(ii) Si mostri che $|Z| \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Exercise 1.12. Sia X un punto aleatorio dell'intervallo $(0,1)$ (non necessariamente uniformemente distrbuito). Esso divide l'intervallo $(0,1)$ in due segmenti. Sia $Y \geq 1$ il rapporto tra il segmento più lungo e quello più corto.

(i) Si esprima Y in funzione di X.

[*Sugg.* Potrebbe risultare utile usare gli eventi $\{X < \frac{1}{2}\}$ e $\{X \geq \frac{1}{2}\}$.]

(ii) Supponiamo che $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Si determinino la funzione di ripartizione e la densità di Y e si mostri che Y ha valor medio infinito.

(iii) Assumiamo ora che X sia una variabile aleatoria assolutamente continua, a valori in $(0,1)$, la cui densità f_X soddisfi la relazione:

$$f_X(x) + f_X(1-x) = 2\,, \qquad \text{per ogni } x \in (0,1)\,. \tag{1.2}$$

Si mostri che la distribuzione di Y è uguale a quella trovata al punto precedente.

[*Sugg.* Si deduca dalla relazione (1.4) che $F_X(z) - F_X(1-z) = 2z - 1$ per $z \in (0,1)$.]

(iv) Si determini una densità f_X, soddisfacente alla relazione (1.4), *diversa* dalla densità di una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$.

Exercise 1.13. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. (indipendenti e con la stessa distribuzione) con $X_i \sim \mathrm{U}(0,1)$.

(i) Poniamo $Y_n := -\log(X_n)$ per $n \in \mathbb{N}$. Si determini la distribuzione di Y_n e si spieghi perché le variabili aleatorie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti.

(ii) Si determini la distribuzione di $S_n := Y_1 + \ldots + Y_n$.

(iii) Si calcoli la funzione di ripartizione di $Z_n := X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ e si deduca che Z_n è una variabile aleatoria assolutamente continua. Se ne calcoli dunque la densità.

[*Sugg.* Si sfruttino i punti precedenti]

Exercise 1.14. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $\mathrm{U}(0,2)$ e sia

$$Y_n := \min\{Y_1, \ldots, Y_n\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sia $T \sim \mathrm{Geo}(p)$ una variabile aleatoria indipendente dalle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e si ponga

$$Z := Y_T, \qquad \text{cioè} \qquad Z(\omega) := Y_{T(\omega)}(\omega).$$

Si determini la funzione di ripartizione di Z, mostrando che è una variabile aleatoria assolutamente continua.

[*Sugg.* Si determini innanzitutto $\mathrm{P}(Z \le x, T = n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.]

Exercise 1.15. Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$. Introduciamo la variabile aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e, per $k \in \mathbb{N}$, l'evento A_k definiti da

$$T(\omega) := \inf\left\{k \ge 1 : X_k(\omega) \le \frac{1}{3}\right\}, \qquad A_k = \left\{X_k \le \frac{1}{3}\right\}.$$

Definiamo quindi la variabile aleatoria

$$Y := X_T \, \mathbb{1}_{\{T<\infty\}},$$

cioè $Y(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ se $T(\omega) < \infty$, mentre $Y(\omega) := 0$ altrimenti.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T = n\}$ in termini degli eventi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Si deduca la distribuzione di T.

(ii) Si determini la distribuzione di Y.

[*Sugg.* Si calcoli $\mathrm{P}(Y \le x, T = n)$ per $n \in \mathbb{N}$.]

Exercise 1.16. Siano X e Y variabile aleatorie real indipendenti. Supponiamo che X sia assolutamente continua, con densità f_X, mentre Y sia discreta, con densità discreta p_Y. Supponiamo inoltre che Y assuma solo un numero finito di valori, cioè l'insieme $Y(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{p}_Y(x) > 0\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ è finito.

(i) Si esprima la funzione di ripartizione di $Z := X + Y$ in termini di f_X e p_Y.

(ii) Si mostri che Z è una variabile aleatoria assolutamente continua, determinandone la densità in funzione di f_X e p_Y.

Exercise 1.17. L'ufficio informazioni delle Ferrovie dello Stato ha due numeri verdi. I tempi di attesa T_1 e T_2 per parlare con l'operatore sono, per entrambi i numeri, variabili aleatorie esponenziali, con media $\mu = 15$ minuti. Inoltre T_1 e T_2 si possono considerare indipendenti. Avendo a disposizione due telefoni, decido di chiamare contemporaneamente i due numeri, in modo da parlare con l'operatore che risponderà per primo.

(i) Quanto tempo, in media, dovrò aspettare per parlare con un operatore?

(ii) Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

Exercise 1.18. Un congegno elettronico è costituito da n componenti collegate in serie: esso smette di funzionare non appena una qualsiasi delle sue componenti si rompe. I tempi di vita $T_1, T_2, \ldots, T_n$ delle n componenti sono variabili aleatorie reali indipendenti e con la stessa distribuzione assolutamente continua, di cui indichiamo con f la densità. Chiaramente $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ (i tempi sono quantità positive!). Supponiamo che f sia una funzione continua su $[0, \infty)$, con $f(0) > 0$. Indicando con X_n il tempo di vita dell'intero dispositivo, si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(X_n > \varepsilon) = 0$$

Exercise 1.19. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie i.i.d., con distribuzione $\mathrm{U}(0,1)$, e definiamo

$$L_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \qquad Z_n := n L_n .$$

Si mostri che la funzione di ripartizione $F_{Z_n}(t)$ converge per $n \to \infty$ verso un limite $F(t)$, che è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria $\mathrm{Exp}(1)$.

Exercise 1.20. Ricordiamo che una variabile aleatoria reale X è detta *di Cauchy* se è assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Può essere utile ricordare che $\arctan(z) + \arctan(\frac{1}{z}) = \frac{\pi}{2}$, per ogni $z \in \mathbb{R}$.

(i) Si dimostri che la variabile aleatoria $Y := 1/X$ è di Cauchy.

(ii) Si calcoli $\mathrm{P}(X > z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}$ e si mostri che per $z \to +\infty$

$$\mathrm{P}(X > z) \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{z},$$

intendendo che il rapporto dei due membri tende a 1 per $z \to +\infty$.

(iii) Sia ora $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione i.i.d. di variabili di Cauchy indipendenti e si definisca $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che per ogni $t > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\frac{M_n}{n} \leq t \right) = \exp\left(-\frac{1}{\pi} \frac{1}{t} \right).$$

Exercise 1.21. Sia $\varphi : [0, +\infty) \to [0, 1)$ una funzione continua, crescente, tale che $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 1$, e il cui comportamento asintotico per $x \downarrow 0$ è dato da

$$\varphi(x) = \alpha x^k + o(x^k), \qquad \text{con } \alpha, k > 0.$$

(i) Si mostri che la funzione $F(t) := 1 - \varphi(1/t)$ è una funzione di ripartizione, ossia soddisfa le proprietà 5.4.

(ii) Si consideri una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di variabili aleatorie i.i.d. con funzione di ripartizione F definita sopra. Ponendo

$$Y_n := \frac{\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{n^{1/k}},$$

si mostri che, per ogni $y > 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(Y_n \leq y) = e^{-\alpha/y^k}.$$

Exercise 1.22. Un lanciatore di giavellotto esegue $n \in \mathbb{N}$ lanci. Detta X_i la distanza ottenuta nell'i-esimo lancio, supponiamo che $X_1, \ldots, X_n$ siano variabili aleatorie i.i.d. con $X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dove $\lambda \in (0, \infty)$. Indichiamo con M_n la massima distanza a cui è stato lanciato il giavellotto.

(i) Sia $W_n := \frac{M_n}{\log(n)}$ e F_{W_n} la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{1}{\lambda} \\ e^{-1} & \text{se } x = \frac{1}{\lambda} \\ 1 & \text{se } x > \frac{1}{\lambda} \end{cases}.$$

(ii) Si deduca che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{M_n}{\log(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(iii) Definiamo ora

$$Z_n := M_n - \frac{1}{\lambda}\log n,$$

e sia $F_{Z_n}(t)$ la relativa funzione di ripartizione. Si mostri che il limite $F(t) := \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t)$ esiste, e lo si determini, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che F è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria assolutamente continua.

Exercise 1.23. Pietro è un lanciatore di giavellotto. Dopo un lancio iniziale, in cui manda il giavellotto a una distanza X_0, si cimenta in una successione di lanci ripetuti: nel lancio n-esimo il giavellotto cade a una distanza X_n. Pietro si interroga su quanti lanci T debba fare per migliorare il risultato iniziale, ossia

$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n > X_0\}.$$

Assumiamo che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ siano variabili aleatorie indipendenti e (ignorando l'effetto della fatica) con la stessa distribuzione, che supponiamo assolutamente continua. Mostreremo che T *ha una distribuzione "universale", che non dipende dalla* *distribuzione delle* X_k, con densità discreta

$$\mathrm{p}_T(k) = \frac{1}{k(k+1)} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k), \tag{1.3}$$

da cui segue che il numero di lanci richiesti per migliorarsi ha media $\mathrm{E}(T) = +\infty$! (Aver ignorato la fatica rende questo risultato ancora più sorprendente.)

(i) Definendo gli eventi

$$A_k^{(n)} := \Big\{ X_k = \max_{0 \le i \le n} X_i \Big\}, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},\ k \in \{0, \ldots, n\},$$

si mostri, con un argomento di simmetria, che

$$\mathrm{P}\big(A_0^{(n)}\big) = \mathrm{P}\big(A_1^{(n)}\big) = \ldots = \mathrm{P}\big(A_n^{(n)}\big).$$

(ii) Si mostri che per ogni $i \neq j$ si ha $\mathrm{P}(X_i \neq X_j) = 1$.

[*Sugg.* Si noti che $X_i - X_j$ è una variabile reale assolutamente continua (perché?).]

(iii) Si spieghi l'inclusione di eventi $A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} \subseteq \{X_i = X_j\}$ e si deduca che

$$\mathrm{P}\big(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}\big) = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

(iv) Si spieghi perché $\bigcup_{k=0}^n A_k^{(n)} = \Omega$ e si deduca che

$$\mathrm{P}(A_k^{(n)}) = \frac{1}{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n.$$

[*Sugg.* Si ricordi l'Esercizio 1.4 del fascicolo I.]

(v) Si spieghi perché $\{T > n\} = A_0^{(n)}$ e, dunque, $\mathrm{P}(T > n) = \frac{1}{n+1}$. Si deduca la formula (1.13) e il fatto che $\mathrm{E}(T) = +\infty$.

Exercise 1.24. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. $\mathrm{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(i) Si mostri che le variabili aleatorie $(Y_n := X_n + \frac{1}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ sono i.i.d. $\mathrm{U}(0,1)$.

(ii) Applicando l'Esercizio 1.20, si deduca che per ogni $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big(\min\{X_1, \ldots, X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{r}{n}\big) = 1 - e^{-r}.$$

Si deduca che esistono $\bar{r} > 0$ e $n_0 < \infty$ tale che per ogni $n > n_0$

$$\mathrm{P}\Big(\min\{X_1, \ldots, X_n\} < -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\bar{r}}{n}\Big) \ge 0.99.$$

(iii) Introduciamo per $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ il sottoinsieme $C_n(\delta) \subseteq \mathbb{R}^n$ definito da

$$C_n(\delta) := \big(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)^n \setminus \big(-\tfrac{1}{2} + \delta, \tfrac{1}{2} - \delta\big)^n,$$

che rappresenta la “buccia interna” di spessore δ del cubo n-dimensionale $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$. Si mostri che per $n > n_0$

$$\mathrm{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in C_n\left(\tfrac{\bar{r}}{n}\right)\right) \geq 0.99\,.$$