Capitolo 1

1.1 Parte V

Exercise 1.1. Sia X una variabile aleatoria, definita su (Ω, P) a valori in E, quasi certamente costante, ossia esiste $c \in E$ tale che $\mathrm{P}(X = c) = 1$. Si mostri che esiste un *unico* elemento $c \in E$ con tale proprietà.

Solution 1.1. Se esistessero due costanti c e c' con tale proprietà, gli eventi $\{X = c\}$ e $\{X = c'\}$ sarebbero due eventi disgiunti di probabilità 1, il che è impossibile.

Exercise 1.2. Siano A e B due eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P), e consideriamo la variabile aleatoria

$$X := \lambda \mathbb{1}_A + \mu \mathbb{1}_B,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si determini la densità discreta di X.

[*Sugg.* Si consideri innanzitutto il caso in cui i quattro numeri $0, \lambda, \mu, \lambda + \mu$ sono distinti.]

Solution 1.2. Supponiamo anzitutto che il caso in cui i quattro numeri $0, \lambda, \mu, \lambda + \mu$ siano distinti. Abbiamo, allora

$$\begin{aligned}
\{X = \lambda\} &= A \cap B^c \;\Rightarrow\; p_X(\lambda) = \mathrm{P}(A \cap B^c) \\
\{X = \mu\} &= A^c \cap B \Rightarrow\; p_X(\mu) = \mathrm{P}(A^c \cap B) \\
\{X = \lambda + \mu\} &= A \cap B \Rightarrow\; p_X(\lambda + \mu) = \mathrm{P}(A \cap B) \\
\{X = 0\} &= A^c \cap B^c \;\Rightarrow\; p_X(0) = \mathrm{P}(A^c \cap B^c)
\end{aligned}$$

Nel caso in cui i quattro numeri $0, \lambda, \mu, \lambda + \mu$ non siano distinti, è sufficiente sommare le probabilità corrispondenti a valori uguali. Ad esempio, se $\lambda = \mu \neq 0$, allora X assume i valori $0, \lambda, 2\lambda$ e $p_X(\lambda) = \mathrm{P}(A \cap B^c) + \mathrm{P}(A^c \cap B)$, $p_X(2\lambda) = \mathrm{P}(A \cap B)$, $p_X(0) = \mathrm{P}(A^c \cap B^c)$. In modo analogo si trattano i casi rimanenti, cioè $\lambda = -\mu \neq 0$, $0 = \lambda \neq \mu$, $0 = \mu \neq \lambda$, $\lambda = \mu = 0$.

Exercise 1.3. Sia X una variabile aleatoria definita su uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) a valori in un insieme E. Indichiamo con $\sigma(X)$ la famiglia degli eventi generati da X:

$$\sigma(X) = \left\{C \subseteq \Omega : \exists A \subseteq E \text{ tale che } C = \{X \in A\}\right\}.$$

Si mostri che un evento $D \subseteq \Omega$ appartiene a $\sigma(X)$ se e solo se verifica la seguente proprietà: per ogni coppia di elementi $\omega, \omega' \in \Omega$ tali che $X(\omega) = X(\omega')$, o entrambi gli elementi appartengono a D o entrambi non vi appartengono, ossia non si può avere che $\omega \in D$ e $\omega' \notin D$, o viceversa che $\omega \notin D$ e $\omega' \in D$.

Solution 1.3. Sia, per cominciare, D un evento con la proprietà: per ogni coppia di elementi $\omega, \omega' \in \Omega$ tali che $X(\omega) = X(\omega')$, o entrambi gli elementi appartengono a D o entrambi non vi appartengono. Poniamo $A = \{X(\omega) : \omega \in D\}$. Per definizione, se $\omega \in D$ allora $X(\omega) \in A$, e quindi $D \subseteq \{X \in A\}$. D'altra parte, se $\omega \in \{X \in A\}$, dev'essere $X(\omega) = X(\omega')$ per qualche $\omega' \in D$; dunque, per ipotesi, $\omega \in D$. Ciò mostra che $\{X \in A\} \subseteq D$, e quindi $\{X \in A\} = D$, cioè $D \in \sigma(X)$.

Viceversa, se $D \in \sigma(X)$, esiste $A \subseteq E$ per cui $D = \{X \in A\}$. Se $\omega, \omega' \in \Omega$ tali che $X(\omega) = X(\omega')$ si ha che

- se $X(\omega) = X(\omega') \in A$ allora $\omega, \omega' \in D$;
- se $X(\omega) = X(\omega') \notin A$ allora $\omega, \omega' \notin D$;

dunque D ha la proprietà richiesta,

Exercise 1.4. Siano A e B due eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si determini la densità congiunta del vettore aleatorio $(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Solution 1.4. Denotiamo con $p(x,y)$ la densità congiunta: $p(x,y) = \mathrm{P}(\mathbb{1}_A = x, \mathbb{1}_B = y)$.

$$\begin{aligned} p(0,0) &= \mathrm{P}(A^c \cap B^c) \\ p(0,1) &= \mathrm{P}(A^c \cap B) \\ p(1,0) &= \mathrm{P}(A \cap B^c) \\ p(1,1) &= \mathrm{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Exercise 1.5. Siano $C_1, C_2, \ldots, C_n$ eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Posto $X_i := \mathbb{1}_{C_i}$, si mostri l'equivalenza delle seguenti affermazioni

(1) le variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono indipendenti;
(2) gli eventi $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono indipendenti.

Si mostri quindi che vale lo stesso per una famiglia $(C_i)_{i \in I}$ arbitraria di eventi.

Solution 1.5.(1) $\Rightarrow$ (2) Sia $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Si noti che

$$\bigcap_{i \in J} C_i = \{X_i = 1 \text{ per ogni } i \in J\}.$$

Dunque, usando l'ipotesi di indipendenza delle variabili aleatorie $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in J} C_i\right) &= \mathrm{P}\left(X_i = 1 \text{ per ogni } i \in J, X_k \in \{0,1\} \text{ per ogni } k \notin J\right) \\ &= \prod_{i\in J} \mathrm{P}(X_i = 1) = \prod_{i\in J} \mathrm{P}(C_i). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Mostriamo che la densità congiunta di $X_1, X_2, \dots, X_n$ è prodotto delle densità marginali. Per $x \in \{0,1\}$, poniamo $C^x := C$ se $x = 1$ e $C^X = C^c$ se $x = 0$. Ricordando che l'indipendenza di eventi si conserva per complementazione, e osservando che $\{X_i = x\} = C^x$:

$$\begin{aligned} p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) &= \mathrm{P}(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = \mathrm{P}(C^{x_1} \cap \dots \cap C^{x_n}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(C^{x_i}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = x_i). \end{aligned}$$

Per estendere l'affermazione a famiglie arbitrarie, basta ricordare che l'indipendenza di una famiglia di variabili aleatorie (risp. eventi) equivale all'indipendenza di ogni sottofamiglia finita.

Exercise 1.6. Date n prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo p, consideriamo le variabili aleatorie $S :=$ "numero di successi nelle n prove" e $T :=$ "prova in cui si ha il primo successo". Si determini la densità congiunta $\mathrm{p}_{S,T}$.

Solution 1.6. L'evento $\{S = s,\ T = t\}$ si può esprimere come segue:

- le prime $t-1$ prove sono stai insuccessi;
- la prova t-esima è stata un successo;
- nelle rimanenti $n-t$ prove vi sono stati $s-1$ successi.

Ne segue che

$$\begin{aligned} p_{S,T}(s,t) = \mathrm{P}(S = s,\ T = t) &= (1-p)^{t-1} p \binom{n-t}{s-1} p^{s-1} (1-p)^{n-t-s+1} \\ &= \binom{n-t}{s-1} p^s (1-p)^{n-s}, \end{aligned}$$

con l'usuale convenzione $\binom{N}{K} \neq 0$ se e solo se $0 \le K \le N$.

Exercise 1.7. Si sceglie "a caso" un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Si determini la densità discreta di X.

Solution 1.7. La variabile X assume solo i valori $0, 1 \dots, 5$. $X = k$ significa che nel lotto di 5 oggetti k sono difettosi. Possiamo calcolare $\mathrm{P}(X = k)$ con la formula "casi favorevoli su casi possibili" della probabilità uniforme. *Casi possibili*: ci sono $\binom{100}{5}$ modi di scegliere 5 oggetti tra 100. *Casi favorevoli*: devo scegliere 5 oggetti di cui

k difettosi. Scelgo prima i k difettosi tra i 10 difettosi in $\binom{10}{k}$ modi, poi scelgo i rimanenti $5-k$ oggetti tra i rimanenti $100-10=90$ non difettosi in $\binom{90}{5-k}$ modi. In definitiva i casi favorevoli sono: $\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ e quindi:

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}, \qquad k=0,1,\dots,5$$

Facendo un po' di conti si ottiene: $\mathrm{P}(X=0) \simeq 0.583$, $\mathrm{P}(X=1) \simeq 0.340$, $\mathrm{P}(X=2) \simeq 0.070$, $\mathrm{P}(X=3) \simeq 0.007$, $\mathrm{P}(X=4) \simeq \mathrm{P}(X=5) \simeq 0$. Per essere sicuri di non aver sbagliato i conti su può fare la verifica $\sum_{k=0}^{5} \mathrm{P}(X=k) = 1$.

Exercise 1.8. Siano X_1, X_2 variabili aleatorie indipendenti, ciascuna delle quali assume i valori $\{1,\dots,n\}$ con la stessa probabilità, dove $n \in \mathbb{N}$. Definiamo la variabile $Y := \min\{X_1, X_2\}$.

(1) Si calcoli $\mathrm{P}(Y=k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
(2) Si mostri che, per ogni $t \in (0,1)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y \le tn) \;=\; 2t - t^2 .$$

Solution 1.8. a) Chiaramente $\mathrm{P}(Y=k)=0$ per $k>n$. Conviene innanzitutto calcolare, per $k \in \{1,\dots,n\}$, la probabilità $\mathrm{P}(Y \ge k)$ che è data da

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \ge k) \;&=\; \mathrm{P}(X_1 \ge k, X_2 \ge k) \;=\; \mathrm{P}(X_1 \ge k)\,\mathrm{P}(X_2 \ge k)\\ &=\; \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 \;=\; \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^2 .\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=k) \;&=\; \mathrm{P}(Y \ge k) - \mathrm{P}(Y \ge k+1) \;=\; \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2\\ &-\left(\frac{n-k}{n}\right)^2 \;=\; \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

b) Dalla formula per $\mathrm{P}(Y \ge k)$ calcolata al punto a) si ottiene

$$\mathrm{P}(Y \le tn) \;=\; 1-\mathrm{P}(Y > tn) \;=\; 1-\mathrm{P}(Y > \lfloor tn \rfloor) \;=\; 1-\left(1-\frac{\lfloor tn \rfloor - 1}{n}\right)^2,$$

e dato che $(\lfloor tn \rfloor - 1)/n \to t$ per $n \to \infty$, per ogni $t \in (0,1)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y \le tn) \;=\; 1-(1-t)^2 \;=\; 2t - t^2 .$$

Exercise 1.9. Un gioco a premi ha un montepremi di 512 euro. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato.

Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si dà alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente a ciascuna domanda con probabilità $p \in (0,1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita in euro di questo concorrente. Si determini la densità discreta p_X di X.

Solution 1.9. La variabile casuale X assume i valori $0,1,2,2^2,2^3,\ldots,2^9$. Per $0 \leq k \leq 9$, il valore 2^{9-k} viene assunto se le prime k risposte sono errate, e la $k+1$-ma è corretta. Ciò avviene con probabilità $(1-p)^k p$. Infine il valore 0 viene assunto se tutte le 10 risposte sono sbagliate, il che avviene con probabilità $(1-p)^{10}$. Riassumendo

$$p_X(2^{9-k}) = p(1-p)^k$$

per $0 \leq k \leq 9$, e $p_X(0) = (1-p)^{10}$.

Exercise 1.10. Due mazzi di 40 carte sono ognuno costituito da 20 carte rosse e 20 nere. Si mescolano entrambi i mazzi, quindi si dispongono uno accanto all'altro. Cominciamo con lo scoprire la prima carta di entrambi i mazzi. Se entrambe sono rosse vinciamo un euro, altrimenti non vinciamo alcunché. Proseguiamo scoprendo le seconde carte dei due mazzi: se sono entrambe rosse vinciamo un altro euro, e così via. Sia X il numero di euro vinti dopo aver scoperto tutte le carte. Si calcoli la densità discreta di X.

Solution 1.10. Per entrambi i mazzi numeriamo le carte da 1 a 40, e conveniamo che quelle rosse siano quelle numerate da 1 a 20. Denotando con $\sigma(i)$ la posizione della carta numero i del primo mazzo dopo il mescolamento, la disposizione delle carte del primo mazzo si può identificare con $\sigma \in S_{40}$. Analogamente, denotiamo con $\eta \in S_{40}$ la disposizione del secondo mazzo. Prendiamo quindi $\Omega := S_{40} \times S_{40}$, con la probabilità uniforme, e $X(\sigma,\eta)$ denota il numero di Euro vinti con le disposizioni σ,η. Per $k = 0,1,\ldots,20$,

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{|\{(\sigma.\eta) : X(\sigma,\eta) = k\}|}{40!^2}.$$

Per calcolare $|\{(\sigma.\eta) : X(\sigma,\eta) = k\}|$ usiamo lo schema delle scelte successive: prima scegliamo σ (40! scelte possibili), poi scegliamo η in modo tale che $X(\sigma,\eta) = k$. Per determinare il numero di scelte possibili per η, sia $I_\sigma := \{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(20)\}$. Un η tale che $X(\sigma,\eta) = k$ si può scegliere come segue.

- Si scelgono k carte rosse (del secondo mazzo): $\binom{20}{k}$ scelte.
- Si dispongono queste carte in I_σ: $\binom{20}{k}k!$ scelte.
- Le rimanenti $20-k$ carte rosse si dispongono in I_σ^c: $\binom{20}{20-k}(20-k)!$ scelte.
- Si dispongono le 20 carte nere nei 20 posti rimasti liberi: 20! scelte.

Riassumendo

$$|\{X(\sigma,\eta) = k\}| = 40!\binom{20}{k}\binom{20}{k}k!\binom{20}{20-k}(20-k)!20!$$

da cui, con facili semplificazioni,

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{20}{k}^2}{\binom{40}{20}}.$$