Capitolo 1

1.1 Parte V

Exercise 1.1. Sia X una variabile aleatoria, definita su (Ω, P) a valori in E, quasi certamente costante, ossia esiste $c \in E$ tale che $\mathrm{P}(X = c) = 1$. Si mostri che esiste un *unico* elemento $c \in E$ con tale proprietà.

Exercise 1.2. Siano A e B due eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P), e consideriamo la variabile aleatoria

$$X := \lambda \mathbb{1}_A + \mu \mathbb{1}_B,$$

dove $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si determini la densità discreta di X.

[*Sugg.* Si consideri innanzitutto il caso in cui i quattro numeri $0, \lambda, \mu, \lambda + \mu$ sono distinti.]

Exercise 1.3. Sia X una variabile aleatoria definita su uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) a valori in un insieme E. Indichiamo con $\sigma(X)$ la famiglia degli eventi generati da X, secondo la Definizione **??**:

$$\sigma(X) = \left\{ C \subseteq \Omega : \ \exists A \subseteq E \text{ tale che } C = \{X \in A\} \right\}.$$

Si mostri che un evento $D \subseteq \Omega$ appartiene a $\sigma(X)$ se e solo se verifica la seguente proprietà: per ogni coppia di elementi $\omega, \omega' \in \Omega$ tali che $X(\omega) = X(\omega')$, o entrambi gli elementi appartengono a D o entrambi non vi appartengono, ossia non si può avere che $\omega \in D$ e $\omega' \notin D$, o viceversa che $\omega \notin D$ e $\omega' \in D$.

Exercise 1.4. Siano A e B due eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Si determini la densità congiunta del vettore aleatorio $(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Exercise 1.5. Siano $C_1, C_2, \ldots, C_n$ eventi in uno spazio di probabilità discreto (Ω, P). Posto $X_i := \mathbb{1}_{C_i}$, si mostri l'equivalenza delle seguenti affermazioni

(1) le variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono indipendenti;

(2) gli eventi $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono indipendenti.

Si mostri quindi che vale lo stesso per una famiglia $(C_i)_{i\in I}$ arbitraria di eventi.

Exercise 1.6. Date n prove ripetute e indipendenti con probabilità di successo p, consideriamo le variabili aleatorie $S :=$ "numero di successi nelle n prove" e $T :=$ "prova in cui si ha il primo successo". Si determini la densità congiunta $\mathrm{p}_{S,T}$.

Exercise 1.7. Si sceglie "a caso" un campione di 5 oggetti da un lotto di 100 di cui 10 sono difettosi per effettuare un controllo di qualità. Sia X il numero di oggetti difettosi contenuti nel campione. Si determini la densità discreta di X.

Exercise 1.8. Siano X_1, X_2 variabili aleatorie indipendenti, ciascuna delle quali assume i valori $\{1,\ldots,n\}$ con la stessa probabilità, dove $n \in \mathbb{N}$. Definiamo la variabile $Y := \min\{X_1, X_2\}$.

(1) Si calcoli $\mathrm{P}(Y = k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
(2) Si mostri che, per ogni $t \in (0,1)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y \leq tn) \;=\; 2t - t^2 \,.$$

Exercise 1.9. Un gioco a premi ha un montepremi di 512 euro. Vengono poste ad un concorrente 10 domande. Ad ogni risposta errata il montepremi viene dimezzato. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se non si dà alcuna risposta esatta non si vince nulla. Un certo concorrente risponde esattamente a ciascuna domanda con probabilità $p \in (0,1)$, indipendentemente dalle risposte alle altre domande. Sia X la vincita in euro di questo concorrente. Si determini la densità discreta p_X di X.

Exercise 1.10. Due mazzi di 40 carte sono ognuno costituito da 20 carte rosse e 20 nere. Si mescolano entrambi i mazzi, quindi si dispongono uno accanto all'altro. Cominciamo con lo scoprire la prima carta di entrambi i mazzi. Se entrambe sono rosse vinciamo un euro, altrimenti non vinciamo alcunché. Proseguiamo scoprendo le seconde carte dei due mazzi: se sono entrambe rosse vinciamo un altro euro, e così via. Sia X il numero di euro vinti dopo aver scoperto tutte le carte. Si calcoli la densità discreta di X.