Capitolo 1

1.1 Parte VI

Exercise 1.1. Siano W, T variabili aleatorie indipendenti, a valori in $\{0,1\}$ e $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ rispettivamente, con le seguenti distribuzioni marginali:

$$\mathrm{P}(T=0) \;=\; \mathrm{P}(T=1) \;=\; \frac{1}{2}\,, \qquad \mathrm{P}(W=n) \;=\; p\,(1-p)^{n-1}\,\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n)\,,$$

dove $p \in (0,1)$ è un parametro fissato. Definiamo la variabile

$$X := W\,\mathbb{1}_{\{T=0\}} + \frac{1}{W}\,\mathbb{1}_{\{T=1\}}\,,$$

che può dunque assumere come valori i numeri naturali e i reciproci dei numeri naturali, ossia $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Si determini la densità discreta di X.
(2) Si mostri che la variabile aleatoria $Y := 1/X$ ha la stessa distribuzione di X.
(3) Si calcoli $\mathrm{E}(X)$.

[*Sugg.* Si ricordi che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = (1-x)^{-2}$, per $|x| < 1$.]

Solution 1.1. (1) La densità discreta di X vale

$$\begin{aligned}
p_X(n) \;&=\; \mathrm{P}(W=n,\, T=0) \;=\; \frac{1}{2}\,p(1-p)^{n-1}\,, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, n \geq 2\,,\\
p_X(1) \;&=\; \mathrm{P}(W=1) \;=\; p\,,\\
p_X\left(\frac{1}{n}\right) \;&=\; \mathrm{P}(W=n,\, T=1) \;=\; \frac{1}{2}\,p(1-p)^{n-1}\,, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, n \geq 2\,.
\end{aligned}$$

(2) Si ha $Y(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dal punto precedente è chiaro che $\mathrm{P}(X=n) = \mathrm{P}(X=\frac{1}{n})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; di conseguenza $p_Y(n) = p_X(\frac{1}{n}) = p_X(n)$ e $p_Y(\frac{1}{n}) = p_X(n) = p_X(\frac{1}{n})$.

(3) Si ha

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot p_X(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} p_X\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \cdot p_X(1) + \sum_{n=2}^{\infty} n\, p_X(n) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2} p(1-p)^{n-1} + p + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{2} p(1-p)^{n-1} \\ &= \frac{p}{2(1-p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1-p)^n + \frac{p}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\,(1-p)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{(1-p)} \log \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

Exercise 1.2. Sia $\Omega_n := \{0,1\}^n$, e

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n.$$

In altre parole gli elementi di Ω sono sequenze binarie di lunghezza arbitraria, ma finita. Se $\omega \in \Omega$, l'unico $n \geq 1$ per cui $\omega \in \Omega_n$ si dice *lunghezza* di ω, e si denota con $l(\omega)$. Per ogni $\omega \in \Omega$, definiamo

$$\mathrm{p}(\omega) := 2^{-2l(\omega)}.$$

(1) Si mostri che p è una densità discreta su Ω, e pertanto essa identifica una probabilità P.
(2) Sullo spazio di probabilità (Ω, P) appena definito, si definisca per ogni $i \geq 1$ la variabile aleatoria

$$X_i(\omega) := \begin{cases} \omega_i & \text{se } i \leq l(\omega) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si determini la distribuzione di X_i.

Solution 1.2. (1) p è la densità di una probabilità se $p(\omega) \geq 0$ per ogni ω (il che è ovvio in questo caso) e $\sum_{\omega} p(\omega) = 1$. Ma

$$\sum_{\omega \in \Omega} 2^{-2l(\omega)} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\omega \in \Omega_n} 2^{-2n} = \sum_{n \geq 1} 2^{-2n} |\Omega_n| = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_i = 1) &= \sum_{n \geq i} \sum_{\omega \in \Omega_n : \omega_i = 1} 2^{-2l(\omega)} \\
&= \sum_{n \geq i} 2^{-2n} |\{\omega \in \Omega_n : \omega_i = 1\}| \\
&= \sum_{n \geq i} 2^{-2n} 2^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \geq i} 2^{-n} = 2^{-i}.
\end{aligned}$$

In altre parole, $X_i \sim Be(2^{-i})$.

Exercise 1.3. Un gioco a premi ha il seguente funzionamento. Il montepremi iniziale è $C > 0$. Il concorrente lancia due volte una moneta. Se l'esito del primo e del secondo lancio sono uguali, il concorrente vince l'intero montepremi. In caso contrario il montepremi si dimezza. Il concorrente lancia la moneta una terza volta. Se l'esito del terzo lancio è uguale a quello del secondo, allora il concorrente vince $C/2$. In caso contrario il montepremi si dimezza ulteriormente, e così via. Sia X il montepremi vinto dal concorrente al termine del gioco.

(Si accetti il fatto che il gioco ha termine, cioè che non sia possibile avere una successione infinita di esiti in cui ogni esito è diverso dal precedente.)

(1) Assumendo che la moneta sia equilibrata, si determini la densità discreta di X.
(2) Sempre nell'ipotesi che la moneta sia equilibrata, si determini il valor medio di X (si ricordi la serie geometrica (**??**)).
(3) Supponiamo ora che la moneta non sia equilibrata: la probabilità che esca *testa* è $p \in (0,1)$. Si determinino la densità e il valor medio di X.

Solution 1.3. (1) Si tratta di usare lo schema delle prove ripetute indipendenti. Si noti che l'evento $\left\{X = \frac{C}{2^{k-1}}\right\}$ è costituito dalle sequenze di esiti di lanci di una moneta in cui nei primi k esiti le teste e le croci si alternano, mentre l'esito $k+1$-mo è uguale al k-mo. Limitandosi ai primi $k+1$ lanci, ci sono due sequenze con questa proprietà, a seconda che l'esito del primo lancio sia testa o croce. Ognuna di queste sequenze ha probabilità $\frac{1}{2^{k+1}}$. Quindi

$$\mathrm{P}\left(X = \frac{C}{2^{k-1}}\right) = \frac{2}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

(2) Ne segue che

$$E(X) = \sum_{k \geq 1} \frac{C}{2^{k-1}} \frac{1}{2^k} = \frac{C}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{C}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2C}{3}.$$

(3) È ancora vero che l'evento $\left\{X = \frac{C}{2^{k-1}}\right\}$, limitandosi ai primi $k+1$ lanci, è costituito da due sequenze, quella che inizia con una testa e quella che inizia con una croce. Non necessariamente queste due sequenze hanno la stessa probabilità. Conviene distinguere due casi:

- k = $2n$, cioè k pari. La sequenza di $k+1 = 2n+1$ lanci che inizia per testa contiene n teste e $n+1$ croci, e ha dunque probabilità $p^n(1-p)^{n+1}$. Analogamente, la sequenza che comincia per croce ha probabilità $p^{n+1}(1-p)^n$. Pertanto

$$\mathrm{P}\left(X = \frac{C}{2^{2n-1}}\right) = p^{n+1}(1-p)^n + p^n(1-p)^{n+1} = p^n(1-p)^n.$$

- k = $2n$-1, cioè k dispari. In questo caso le due sequenze dei primi $k+1 = 2n$ lanci contengono, rispettivamente, $n+1$ teste e $n-1$ croci e viceversa, da cui segue che

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X = \frac{C}{2^{2n-2}}\right) &= p^{n+1}(1-p)^{n-1} + p^{n-1}(1-p)^{n+1} \\ &= p^{n-1}(1-p)^{n+1}\left[p^2 + (1-p)^2\right].\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n\geq 1} \frac{C}{2^{2n-1}} p^n(1-p)^n + \left[p^2+(1-p)^2\right] \sum_{n\geq 1} \frac{C}{2^{2n-2}} p^{n-1}(1-p)^{n-1} \\ &= C\left[\frac{1}{2}p(1-p) + p^2 + (1-p)^2\right] \sum_{n\geq 1}\left(\frac{p(1-p)}{4}\right)^{n-1} \\ &= C\frac{\frac{1}{2}p(1-p) + p^2 + (1-p)^2}{1 - \frac{p(1-p)}{4}}\end{aligned}$$

Exercise 1.4. Consideriamo una famiglia di urne, indicizzate dai numeri naturali incluso lo zero: l'urna k-esima, con $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, contiene 1 pallina nera e k palline bianche. Katia sceglie un numero casuale X, con distribuzione Pois(λ), e pesca una pallina a caso dall'urna numero X. Indichiamo con A l'evento "la pallina pescata da Katia è nera".

(1) Si determini $\mathrm{P}(A|X = k)$, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$. Si deduca che $\mathrm{P}(A) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.
(2) Si determini $\mathrm{q}(k) := \mathrm{P}(X = k|A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$.
(3) Si mostri che $\mathrm{q}(\cdot)$ coincide con la densità discreta della variabile aleatoria $Y := X-1$ rispetto alla probabilità $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X \geq 1)$.
(4) Si calcoli $\mathrm{E}(X|A)$, ossia il valore atteso di X rispetto alla probabilità $\mathrm{P}(\,\cdot\,|A)$.

Solution 1.4. (1) Per costruzione $\mathrm{P}(A|X = k) = \frac{1}{k+1}$, quindi per la formula delle probabilità totali

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \mathrm{P}(A|X=k)\,\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\big(1 - \mathrm{P}(X=0)\big) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda},\end{aligned}$$

avendo fatto il cambio di variabili $k+1=m$.

(2) Per la formula di Bayes

$$\mathrm{q}(k) = \frac{\mathrm{P}(A|X=k)\,\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}{\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\,.$$

(3) Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{P}(Y=k|X\geq 1) = \mathrm{P}(X=k+1|X\geq 1) = \frac{\mathrm{P}(X=k+1)}{\mathrm{P}(X\geq 1)} = \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \mathrm{q}(k)\,.$$

(4) Usando la formula per $\mathrm{q}(k)$ ricavata sopra si ha

$$\mathrm{E}(X|A) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} k\,\mathrm{q}(k) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\,,$$

e scrivendo $k=(k+1)-1$ si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X|A) &= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\left(\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\big(\lambda e^{\lambda} - (e^{\lambda}-1)\big) = \frac{\lambda-(1-e^{-\lambda})}{1-e^{-\lambda}}\,.\end{aligned}$$