Capitolo 1

1.1 Parte VI

Exercise 1.1. Siano W, T variabili aleatorie indipendenti, a valori in $\{0,1\}$ e $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ rispettivamente, con le seguenti distribuzioni marginali:

$$\mathrm{P}(T=0) \;=\; \mathrm{P}(T=1) \;=\; \frac{1}{2}\,, \qquad \mathrm{P}(W=n) \;=\; p\,(1-p)^{n-1}\,\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n)\,,$$

dove $p \in (0,1)$ è un parametro fissato. Definiamo la variabile

$$X := W\,\mathbb{1}_{\{T=0\}} + \frac{1}{W}\,\mathbb{1}_{\{T=1\}}\,,$$

che può dunque assumere come valori i numeri naturali e i reciproci dei numeri naturali, ossia $X(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(1) Si determini la densità discreta di X.

(2) Si mostri che la variabile aleatoria $Y := 1/X$ ha la stessa distribuzione di X.

(3) Si calcoli $\mathrm{E}(X)$.

[*Sugg.* Si ricordi che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$, per $|x| < 1$.]

Exercise 1.2. Sia $\Omega_n := \{0,1\}^n$, e

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n.$$

In altre parole gli elementi di Ω sono sequenze binarie di lunghezza arbitraria, ma finita. Se $\omega \in \Omega$, l'unico $n \geq 1$ per cui $\omega \in \Omega_n$ si dice *lunghezza* di ω, e si denota con $l(\omega)$. Per ogni $\omega \in \Omega$, definiamo

$$\mathrm{p}(\omega) := 2^{-2l(\omega)}.$$

(1) Si mostri che p è una densità discreta su Ω, e pertanto essa identifica una probabilità P.

(2) Sullo spazio di probabilità (Ω, P) appena definito, si definisca per ogni $i \geq 1$ la variabile aleatoria

$$X_i(\omega) := \begin{cases} \omega_i & \text{se } i \leq l(\omega) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si determini la distribuzione di X_i.

Exercise 1.3. Un gioco a premi ha il seguente funzionamento. Il montepremi iniziale è $C > 0$. Il concorrente lancia due volte una moneta. Se l'esito del primo e del secondo lancio sono uguali, il concorrente vince l'intero montepremi. In caso contrario il montepremi si dimezza. Il concorrente lancia la moneta una terza volta. Se l'esito del terzo lancio è uguale a quello del secondo, allora il concorrente vince $C/2$. In caso contrario il montepremi si dimezza ulteriormente, e così via. Sia X il montepremi vinto dal concorrente al termine del gioco.

(Si accetti il fatto che il gioco ha termine, cioè che non sia possibile avere una successione infinita di esiti in cui ogni esito è diverso dal precedente.)

(1) Assumendo che la moneta sia equilibrata, si determini la densità discreta di X.

(2) Sempre nell'ipotesi che la moneta sia equilibrata, si determini il valor medio di X (si ricordi la serie geometrica (**??**)).

(3) Supponiamo ora che la moneta non sia equilibrata: la probabilità che esca *testa* è $p \in (0,1)$. Si determinino la densità e il valor medio di X.

Exercise 1.4. Consideriamo una famiglia di urne, indicizzate dai numeri naturali incluso lo zero: l'urna k-esima, con $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, contiene 1 pallina nera e k palline bianche. Katia sceglie un numero casuale X, con distribuzione $\mathrm{Pois}(\lambda)$, e pesca una pallina a caso dall'urna numero X. Indichiamo con A l'evento "la pallina pescata da Katia è nera".

(1) Si determini $\mathrm{P}(A|X = k)$, per ogni $k \in \mathbb{N}_0$. Si deduca che $\mathrm{P}(A) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

(2) Si determini $\mathrm{q}(k) := \mathrm{P}(X = k|A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$.

(3) Si mostri che $\mathrm{q}(\cdot)$ coincide con la densità discreta della variabile aleatoria $Y := X - 1$ rispetto alla probabilità $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X \geq 1)$.

(4) Si calcoli $\mathrm{E}(X|A)$, ossia il valore atteso di X rispetto alla probabilità $\mathrm{P}(\,\cdot\,|A)$.