Capitolo 1

1.1 Parte VII

Exercise 1.1. Un'urna contiene $n \geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute *senza reimmissione*. Introduciamo la variabile aleatoria

X = numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa,

la cui densità discreta verrà indicata con $p_X(k) = P(X = k)$.

(1) Si mostri che, per $k = 0, 1, \dots, n$,

$$p_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1).$$

(2) Si calcoli $E(X)$.

Solution 1.1. (1) Consideriamo gli eventi A = “la $k + 1$ -ma pallina estratta è rossa”, B = “le prime k palline estratte sono tutte bianche”. Si ha

$$P(X = k) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{2}{n-k+2} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+2}{k}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1),$$

dove nell'ultimo passaggio si sono eseguite le dovute semplificazioni.

(2)

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^n k(n-k+1) = \frac{2}{n+2} \sum_{k=1}^n k - \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{n+2} - \frac{n(2n+1)}{3(n+2)} = \frac{n}{3}. \end{aligned}$$

Exercise 1.2. Da un'urna contenente r palline rosse e v palline verdi si estraggono successivamente, senza reimmissione, k palline, con $k \leq \min(r, v)$. Sia

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{se l' } i\text{-ma pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, k,$$

e definiamo $X = X_1 + \dots + X_k$.

- (1) Si determini la distribuzione di X .
- (2) Si determinino le distribuzioni delle X_i .
- (3) Si calcoli $E(X)$.
- (4) Si mostri, per induzione su k , che la densità congiunta delle X_i è data da

$$P_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{r(r-1) \cdots (r - \sum_{i=1}^k x_i + 1) v(v-1) \cdots (v - k + \sum_{i=1}^k x_i + 1)}{(r+v)(r+v-1) \cdots (r+v-k+1)}$$

Solution 1.2. (1) X è il numero di palline rosse estratte in k estrazioni senza reintroduzione, e quindi

$$p_X(n) = \binom{r}{n} \binom{v}{k-n} / \binom{r+v}{k}.$$

- (2) Identifichiamo l'insieme delle palline con $\{1, 2, \dots, r+v\}$, convenendo che le palline rosse siano le prime r . Lo schema di estrazioni senza reintroduzione si può modellare scegliendo, come spazio campionario, $\Omega =$ insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \dots, r+v\}$, con la probabilità uniforme. Allora $\{X_i = 1\} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(i) \in \{1, 2, \dots, r\}\}$, che ha cardinalità $r(r+v-1)!$, e quindi probabilità $r/r+v$. In conclusione

$$p_{X_i}(1) = 1 - p_{X_i}(0) = \frac{r}{r+v}.$$

- (3) Essendo $E(X_i) = r/r+v$, si ha $E(X) = kr/(r+v)$.
- (4) Per induzione su k . Per $k = 1$ la risposta è già in b. Altrimenti, se $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) \in \{0, 1\}^k$,

$$P(X = x) = P(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1) P(X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1).$$

Per $P(X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1)$ si usa l'ipotesi induttiva, mentre

$$P(X_k = 1 | X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1) = \frac{r - \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{r+v-k+1},$$

da cui si giunge alla conclusione.

Exercise 1.3. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e indichiamo con S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$, munito della probabilità P uniforme. Gli elementi di S_n saranno indicati con $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. Introduciamo le variabili aleatorie reali X, Y definite da

$$X(\sigma) := \sigma(1), \quad Y(\sigma) := \sigma(2).$$

(1) Si mostri che, per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, la densità congiunta di X e Y vale

$$p_{X,Y}(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{c_n} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases},$$

dove c_n è un'opportuna costante che è richiesto di determinare.

(2) Si determini la densità della variabile $D := Y - X$.

[Sugg. Basta calcolare $p_D(m)$ per $m > 0$, poiché per simmetria $p_D(-m) = p_D(m)$.]

Siano ora Z, W due variabili aleatorie reali indipendenti, definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \tilde{P})$, tali che $\tilde{P}(Z = i) = \tilde{P}(W = i) = \frac{1}{n}$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

(3) Si calcoli $\tilde{P}(Z \neq W)$.

(4) Si mostri che $\tilde{P}(Z = i, W = j | Z \neq W) = p_{X,Y}(i, j)$ per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
In altri termini, il vettore aleatorio (Z, W) , rispetto alla probabilità condizionale $\tilde{P}(\cdot | Z \neq W)$, ha la stessa distribuzione congiunta del vettore iniziale (X, Y) .

Solution 1.3. (1) Per definizione di spazio di probabilità uniforme

$$p_{X,Y}(i, j) = P(X = i, Y = j) = \frac{|\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j, \sigma(2) = i\}|}{|S_n|}.$$

Chiaramente $p_{X,Y}(i, j) = 0$ se $i = j$, perché le permutazioni sono biunivoche e dunque non si può avere $\sigma(1) = \sigma(2)$. Per $i \neq j$, le permutazioni $\sigma \in S_n$ tali che $\sigma(1) = j, \sigma(2) = i$ sono in corrispondenza con le applicazioni biunivoche da $\{3, \dots, n\}$ a valori in $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$, di conseguenza $|\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j, \sigma(2) = i\}| = (n-2)!$ e si ottiene

$$p_{X,Y}(i, j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{c_n}, \quad \text{dove } c_n := n(n-1).$$

(Si noti che $c_n = |\{(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} : i \neq j\}| = |(X, Y)(S_n)|$.)

(2) Chiaramente i valori possibili per la variabile D sono $D(S_n) = \{-(n-1), \dots, (n-1)\} \setminus \{0\}$. Per $m \in D(S_n)$, con $m > 0$, si ha

$$\{D = m\} = \bigcup_{k=1}^{n-m} \{X = k, Y = k+m\},$$

e dato che gli eventi che appaiono nell'unione sono disgiunti segue che per ogni $m \in \{1, \dots, n-1\}$

$$P(D = m) = \sum_{k=1}^{n-m} P(X = k, Y = k+m) = \frac{1}{c_n} (n-m) = \frac{n-m}{n(n-1)}.$$

Con analoghi argomenti (oppure per simmetria) si ha $P(D = m) = P(D = -m)$ per $m < 0$, per cui la formula generale è

$$P(D = m) = \frac{n - |m|}{n(n-1)},$$

per ogni $m \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\} \setminus \{0\}$.

(3)

$$\tilde{P}(Z \neq W) = 1 - \tilde{P}(Z = W) = 1 - \sum_{i=1}^n \tilde{P}(Z = i, W = i) = 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

(4) Chiaramente $\tilde{P}(Z = i, W = j | Z \neq W) = 0$ se $i = j$. Per $i \neq j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{P}(Z = i, W = j | Z \neq W) &= \frac{\tilde{P}(Z = i, W = j)}{\tilde{P}(Z \neq W)} = \frac{\tilde{P}(Z = i)\tilde{P}(W = j)}{\tilde{P}(Z \neq W)} = \frac{\frac{1}{n} \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{c_n} = p_{X,Y}(i, j). \end{aligned}$$

Exercise 1.4. Sia $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Con un calcolo diretto a partire dall'espressione della densità discreta, si mostri che $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$. Ricordando che $E(X) = np$, si deduca quindi che $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

[Sugg. Si noti che $k(k-1)\binom{n}{k}p^k = p^2 \cdot \binom{n-2}{k-2}p^{k-2}$.]

Solution 1.4. Si ha

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \text{P}_{\text{Bin}(n-2,p)}(\ell) = n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Si ottiene dunque $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = n^2p^2 - np^2 + np$, da cui segue che $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np - np^2 = np(1-p)$.

Exercise 1.5. Sia $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Con un calcolo diretto a partire dall'espressione della densità discreta, si mostri che $M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$. Si deducano quindi i valori di $E(X)$ e $E(X^2)$, e si ricavi $\text{Var}(X)$.

[Sugg. Si ricordi il binomio di Newton.]

Solution 1.5. Si ha

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n. \end{aligned}$$

Exercise 1.6. Sia $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Usando l'espressione della densità discreta, si mostri che $E(X) = \lambda$ e $E(X(X-1)) = \lambda^2$. Si deduca quindi che $\text{Var}(X) = \lambda$.

Solution 1.6. Cominciamo col calcolare $E(X)$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n p_X(n) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

In modo simile:

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) p_X(n) = e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \lambda^2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda.$$

Infine

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Exercise 1.7. Fissati $p \in (0, 1)$ e $n \geq 2$, siano $Z_1, \dots, Z_n$ variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{-1, 1\}$, con $P(Z_i = 1) = p$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Definiamo

$$X := \prod_{i=1}^n Z_i = Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_n.$$

(1) Si determini $E(X)$ e si deduca la distribuzione di X .

[Sugg. Che valori può assumere X ?]

(2) X è indipendente dal vettore aleatorio $(Z_1, \dots, Z_n)$?

(3) X è indipendente dal vettore aleatorio $(Z_2, \dots, Z_n)$?

Solution 1.7. (1) Per l'indipendenza delle Z_i si ha $E(X) = \prod_{i=1}^n E(Z_i) = E(Z_1)^n = (p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1))^n = (2p-1)^n$. Dato che $X \in \{-1, 1\}$, la distribuzione di X è data da $\mu_X = q\delta_1 + (1-q)\delta_{-1}$, quindi $E(X) = q - (1-q) = 2q - 1$ da cui $q = \frac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)$.

(2) X è funzione di $(Z_1, \dots, Z_n)$, quindi non può essere indipendente da $(Z_1, \dots, Z_n)$ (a parte il caso banale in cui $X = (\text{cost.})$ q.c.). Più formalmente

$$0 = P(X = -1, (Z_1, \dots, Z_n) = (1, \dots, 1)) \neq P(X = -1) P(Z_1, \dots, Z_n) = (1, \dots, 1) > 0.$$

(3) C'è indipendenza se e solo se $p = \frac{1}{2}$. Infatti, se $p = \frac{1}{2}$ si ha

$$P(X = \pm 1 | Z_2 = t_2, \dots, Z_{n-1} = t_{n-1}) = P(Z_1 = \pm \text{sign}(t_2 \cdot t_3 \cdots t_{n-1})) = \frac{1}{2} = P(X = \pm 1),$$

quindi X e $(Z_2, \dots, Z_n)$ sono indipendenti. Se invece $p \neq \frac{1}{2}$

$$P(X = 1 | Z_2 = 1, \dots, Z_n = 1) = P(Z_1 = 1) = p \neq \frac{1}{2}(1 + (2p - 1)^n) = P(X = 1).$$

Exercise 1.8. Un insetto depone un numero aleatorio $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ di uova. Ciascun uovo deposto si schiude con probabilità $p \in (0, 1)$, indipendentemente dal numero di uova deposte e dal fatto che le altre si schiudano. Indichiamo con X il numero (aleatorio) di uova che si schiudono.

(1) Qual è il valore di $P(X = k | N = n)$, per $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{R}$?

(2) Si determini la distribuzione di X .

Solution 1.8. $P(X = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ per $k \in \{0, \dots, n\}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ si ha $P(X = k) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} P(X = k | N = n) P(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}$ cioè $X \sim \text{Po}(p\lambda)$.

Exercise 1.9. Siano X e Y due variabili aleatorie a valori in $\mathbb{N}_0$ aventi la seguente densità congiunta:

$$p_{X,Y}(k, n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$ sono parametri fissati. Si determinino le densità marginali di X e Y e si calcoli $\text{Cov}(X, Y)$.

Solution 1.9. $p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}$,

$$p_Y(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!},$$

quindi $X \sim \text{Pois}(p\lambda)$ e $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Infine $E(XY) = \sum_{n,k \in \mathbb{N}_0} nk p_{X,Y}(n, k) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_X(n) \sum_{k=0}^n k p_{\text{Bin}(n,p)}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_X(n) (pn) = p E(X^2) = p(\lambda + \lambda^2)$, da cui $\text{Cov}(X, Y) = p\lambda$.

Exercise 1.10. Siano X, Z e W variabili aleatorie indipendenti con $X \sim \text{Be}(p)$ e $Z, W \sim \text{Pois}(\lambda)$. Definiamo $Y := XZ + W$.

(1) Si spieghi la seguente uguaglianza di eventi: per ogni $m \in \{0, 1\}$ e $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{X = m, Y = n\} = \{X = m, mZ + W = n\}.$$

(2) Si determinino le densità discrete di (X, Y) e di Y .

- (3) Usando la densità p_Y ottenuta al punto precedente, si calcoli $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.
 (4) Si calcoli $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$ senza utilizzare p_Y .

Solution 1.10. (1)

- (2) $p_{X,Y}(0, n) = P(X = 0, Y = n) = P(X = 0, W = n) = (1 - p)e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, $p_{X,Y}(1, n) = P(X = 1, Y = n) = P(X = 1, Z + W = n) = pe^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!}$, da cui $p_Y(n) = p_{X,Y}(0, n) + p_{X,Y}(1, n) = pe^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!} + (1 - p)e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.
 (3) $E(Y) = p \cdot 2\lambda + (1 - p) \cdot \lambda = \lambda(p + 1)$, $E(Y^2) = p \cdot [(2\lambda)^2 + (2\lambda)] + (1 - p) \cdot (\lambda^2 + \lambda)$, da cui $\text{Var}(Y) = \lambda^2(p - p^2) - \lambda(1 + p)$.
 (4) $E(Y) = E(X)E(Z) + E(W) = p\lambda + \lambda$, $E(Y^2) = \dots$, ecc.

Exercise 1.11. Elena lancia ripetutamente una moneta. La probabilità di ottenere testa vale $p \in (0, 1)$. Detto $X_k \in \{0, 1\}$ l'esito dell' k -esimo lancio (testa = 1, croce = 0), indichiamo con S, T rispettivamente il primo e secondo istante in cui esce testa:

$$S := \min\{k \in \mathbb{N} : X_k = 1\}, \quad T := \min\{k \in \mathbb{N}, k > S : X_k = 1\},$$

con la convenzione $\min \emptyset := +\infty$. Poniamo quindi

$$U := T - S$$

e definiamo infine per $k \in \mathbb{N}$ gli eventi

$$A_k := \{X_k = 1\}.$$

- (1) Fissiamo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Si esprima l'evento $\{S = m, T = n\}$ in funzione degli eventi $A_1, \dots, A_n$ mediante opportune operazioni insiemistiche. Si deduca quindi la densità congiunta

$$p_{S,T}(m, n) = P(S = m, T = n) = (1 - p)^{n-2} p^2 \mathbb{1}_{\{1 \leq m < n\}}.$$

- (2) Si determini la densità congiunta delle variabili aleatorie S, U . Si deduca che S e U sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione marginale (quale?).
 (3) Si calcolino $E(T)$ e $\text{Var}(T)$.

Solution 1.11. (1) $\{S = m, T = n\} = (\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i^c) \cap A_m \cap (\bigcap_{i=m+1}^{n-1} A_i^c) \cap A_n$ e dato che gli eventi $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono indipendenti con la stessa probabilità p si deduce che per $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ si ha $p_{S,T}(m, n) = (1 - p)^{m-1} p (1 - p)^{n-m-1} p = (1 - p)^{n-2} p^2$.

- (2) Per ogni $m, \ell \in \mathbb{N}$ si ha $\{S = m, U = \ell\} = \{S = m, T = m + \ell\}$ da cui $p_{S,U}(m, \ell) = p_{S,T}(m, m + \ell) = p^2 (1 - p)^{m+\ell-2} = [p(1 - p)^{m-1}] [p(1 - p)^{\ell-1}]$. Questo mostra che $S, U \sim \text{Geo}(p)$ e che S e U sono indipendenti.

- (3) Si ha $T = S + U$ da cui $E(T) = E(S) + E(U) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$.