

Capitolo 1

1.1 Parte VII

Exercise 1.1. Un'urna contiene $n \geq 1$ palline bianche e 2 palline rosse. Si eseguono estrazioni ripetute *senza reimmissione*. Introduciamo la variabile aleatoria

X = numero di palline bianche estratte prima di estrarre una pallina rossa,

la cui densità discreta verrà indicata con $p_X(k) = P(X = k)$.

(1) Si mostri che, per $k = 0, 1, \dots, n$,

$$p_X(k) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}(n-k+1).$$

(2) Si calcoli $E(X)$.

Exercise 1.2. Da un'urna contenente r palline rosse e v palline verdi si estraggono successivamente, senza reimmissione, k palline, con $k \leq \min(r, v)$. Sia

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{se l}'i\text{-ma pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, k,$$

e definiamo $X = X_1 + \dots + X_k$.

(1) Si determini la distribuzione di X .

(2) Si determinino le distribuzioni delle X_i .

(3) Si calcoli $E(X)$.

(4) Si mostri, per induzione su k , che la densità congiunta delle X_i è data da

$$p_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{r(r-1) \cdots (r - \sum_{i=1}^k x_i + 1) v(v-1) \cdots (v - k + \sum_{i=1}^k x_i + 1)}{(r+v)(r+v-1) \cdots (r+v-k+1)}$$

Exercise 1.3. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e indichiamo con S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$, munito della probabilità P uniforme. Gli elementi di S_n saranno indicati con $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. Introduciamo le variabili aleatorie reali X, Y definite da

$$X(\sigma) := \sigma(1), \quad Y(\sigma) := \sigma(2).$$

(1) Si mostri che, per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, la densità congiunta di X e Y vale

$$p_{X,Y}(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{c_n} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases},$$

dove c_n è un'opportuna costante che è richiesto di determinare.

(2) Si determini la densità della variabile $D := Y - X$.

[Sugg. Basta calcolare $p_D(m)$ per $m > 0$, poiché per simmetria $p_D(-m) = p_D(m)$.]

Siano ora Z, W due variabili aleatorie reali indipendenti, definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \tilde{P})$, tali che $\tilde{P}(Z = i) = \tilde{P}(W = i) = \frac{1}{n}$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

(3) Si calcoli $\tilde{P}(Z \neq W)$.

(4) Si mostri che $\tilde{P}(Z = i, W = j | Z \neq W) = p_{X,Y}(i, j)$ per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
In altri termini, il vettore aleatorio (Z, W) , rispetto alla probabilità condizionale $\tilde{P}(\cdot | Z \neq W)$, ha la stessa distribuzione congiunta del vettore iniziale (X, Y) .

Exercise 1.4. Sia $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Con un calcolo diretto a partire dall'espressione della densità discreta, si mostri che $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$. Ricordando che $E(X) = np$, si deduca quindi che $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

[Sugg. Si noti che $k(k-1)\binom{n}{k}p^k = p^2 \cdot \binom{n-2}{k-2}p^{k-2}$.]

Exercise 1.5. Sia $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Con un calcolo diretto a partire dall'espressione della densità discreta, si mostri che $M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$. Si deducano quindi i valori di $E(X)$ e $E(X^2)$, e si ricavi $\text{Var}(X)$.

[Sugg. Si ricordi il binomio di Newton.]

Exercise 1.6. Sia $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Usando l'espressione della densità discreta, si mostri che $E(X) = \lambda$ e $E(X(X-1)) = \lambda^2$. Si deduca quindi che $\text{Var}(X) = \lambda$.

Exercise 1.7. Fissati $p \in (0, 1)$ e $n \geq 2$, siano $Z_1, \dots, Z_n$ variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{-1, 1\}$, con $P(Z_i = 1) = p$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Definiamo

$$X := \prod_{i=1}^n Z_i = Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_n.$$

(1) Si determini $E(X)$ e si deduca la distribuzione di X .

[Sugg. Che valori può assumere X ?]

(2) X è indipendente dal vettore aleatorio $(Z_1, \dots, Z_n)$?

(3) X è indipendente dal vettore aleatorio $(Z_2, \dots, Z_n)$?

Exercise 1.8. Un insetto depone un numero aleatorio $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ di uova. Ciascun uovo deposto si schiude con probabilità $p \in (0, 1)$, indipendentemente dal numero di uova deposte e dal fatto che le altre si schiudano. Indichiamo con X il numero (aleatorio) di uova che si schiudono.

(1) Qual è il valore di $P(X = k | N = n)$, per $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{R}$?

(2) Si determini la distribuzione di X .

Exercise 1.9. Siano X e Y due variabili aleatorie a valori in $\mathbb{N}_0$ aventi la seguente densità congiunta:

$$p_{X,Y}(k, n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $p \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$ sono parametri fissati. Si determinino le densità marginali di X e Y e si calcoli $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercise 1.10. Siano X, Z e W variabili aleatorie indipendenti con $X \sim \text{Be}(p)$ e $Z, W \sim \text{Pois}(\lambda)$. Definiamo $Y := XZ + W$.

(1) Si spieghi la seguente uguaglianza di eventi: per ogni $m \in \{0, 1\}$ e $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{X = m, Y = n\} = \{X = m, mZ + W = n\}.$$

(2) Si determinino le densità discrete di (X, Y) e di Y .

(3) Usando la densità p_Y ottenuta al punto precedente, si calcoli $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.

(4) Si calcoli $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$ *senza* utilizzare p_Y .

Exercise 1.11. Elena lancia ripetutamente una moneta. La probabilità di ottenere testa vale $p \in (0, 1)$. Detto $X_k \in \{0, 1\}$ l'esito dell' k -esimo lancio (testa = 1, croce = 0), indichiamo con S, T rispettivamente il primo e secondo istante in cui esce testa:

$$S := \min\{k \in \mathbb{N} : X_k = 1\}, \quad T := \min\{k \in \mathbb{N}, k > S : X_k = 1\},$$

con la convenzione $\min \emptyset := +\infty$. Poniamo quindi

$$U := T - S$$

e definiamo infine per $k \in \mathbb{N}$ gli eventi

$$A_k := \{X_k = 1\}.$$

(1) Fissiamo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Si esprima l'evento $\{S = m, T = n\}$ in funzione degli eventi $A_1, \dots, A_n$ mediante opportune operazioni insiemistiche. Si deduca quindi la densità congiunta

$$p_{S,T}(m,n) = P(S=m, T=n) = (1-p)^{n-2} p^2 \mathbb{1}_{\{1 \leq m < n\}}.$$

- (2) Si determini la densità congiunta delle variabili aleatorie S, U . Si deduca che S e U sono indipendenti e hanno la stessa distribuzione marginale (quale?).
- (3) Si calcolino $E(T)$ e $\text{Var}(T)$.