Capitolo 1

1.1 Parte VIII

Exercise 1.1. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $\mathrm{Geo}(p)$. Per $n \geq 2$ fissato, si determini la distribuzione della variabile aleatoria X rispetto alla probabilità condizionata $\mathrm{P}(\,\cdot\,|X+Y=n)$.

Solution 1.1. Poniamo per $k \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{q}(k) \;:=\; \mathrm{P}(X=k\,|\,X+Y=n)\,.$$

$\mathrm{P}(X+Y=n) = p^2\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}(1-p)^{n-k-1} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$, da cui $\mathrm{q}(k) = \frac{p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$ se $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ e $q(k)=0$ altrimenti.

Exercise 1.2. Stefano lancia ripetutamente un dado regolare a sei facce. Indichiamo con X_k il risultato dell'k-esimo lancio, per $k \in \mathbb{N}$. Matteo sta a guardare gli esiti dei lanci, aspettando il primo istante T in cui esce un numero in $\{1,2,3,4,5\}$. Quando ciò accade, si appunta su un foglio il numero uscito $Y := X_T$.

(1) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si esprima l'evento $\{T=n\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1,\ldots,X_n$. Si deduca quindi la densità discreta di T e la si riconosca.
(2) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$, si esprima l'evento $\{T=n, Y=a\}$ in termini delle variabili aleatorie $X_1,\ldots,X_n$. Si deduca quindi la densità discreta congiunta delle variabili aleatorie T e Y.
(3) Si determini la distribuzione di Y. Le variabili T e Y sono indipendenti?

Solution 1.2. (1) Si osservi che

$$\{T=n\} = \{X_1=6,\ldots,X_{n-1}=6, X_n \neq 6\},$$

da cui, usando l'indipendenza delle X_k, otteniamo

$$\mathrm{P}(T=n) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1},$$

cioè $T \sim \text{Geo}(5/6)$.

(2)
$$\{T = n, Y = a\} = \{X_1 = 6, \dots, X_{n-1} = 6, X_n \neq a\},$$
da cui segue che
$$p_{T,Y}(n,a) = \frac{1}{6^n}$$
per ogni $n \geq 1$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$.

(3) Abbiamo
$$p_Y(a) = \sum_{n \geq 1} p_{T,Y}(n,a) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{5},$$
cioè $Y \sim \text{Unif}(\{1,2,3,4,5\})$. Dunque, per ogni $n \geq 1$ e $a \in \{1,2,3,4,5\}$
$$p_T(n) p_Y(a) = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{5} = \frac{1}{6^n} = p_{T,Y}(n,a) = \frac{1}{6^n},$$
da cui segue che T e Y sono indipendenti.