Esercizio 1 (Vale 6 punti) Appello 30/6/04

Sia $a>1$ e $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0<y<1, \frac{\sqrt{y}}{a} < x < \sqrt{y} \}$. Disegnare D.

Sia inoltre $f : D \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Svolgimento

$f(0,0)$ non e' definita - $f \in \mathcal{C}(D) \Rightarrow$ posso determinare il limite suddetto tendendo a 0 lungo parabole $x = \sqrt{y}$ o $x = \frac{\sqrt{y}}{a}$

Si ottiene che

$$\text{racc. } \frac{y}{2}$$

se $x = \sqrt{y}/2$ $\quad f(\sqrt{y},y) = \frac{\sqrt{y}/2}{\frac{\sqrt{y}}{2}+y} = \frac{\frac{\sqrt{y}}{2}\left(\frac{\sqrt{y}}{2}-y\right)}{\left(\frac{\sqrt{y}}{2}-y\right)\left(\frac{\sqrt{y}}{2}+y\right)} = \frac{\frac{y}{4}-\frac{\sqrt{y}}{2}y}{\frac{y}{4}-y^2} = \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{y}}{\frac{1}{2}-y}$

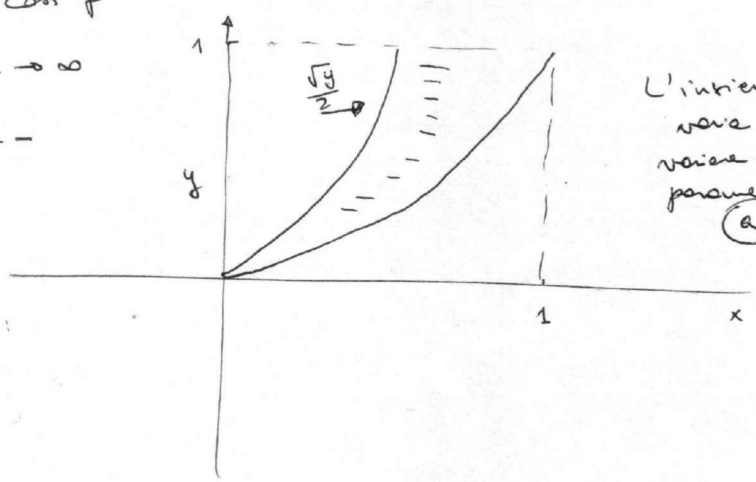
o se $x = \frac{\sqrt{y}}{a} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{y}}{a}, y\right) = \frac{\frac{1}{a} - \sqrt{y}}{\frac{1}{a} - y}$

da cui $\lim_{y\to 0} f\left(\frac{\sqrt{y}}{a}, y\right) = 1$ c.v.d

L'insieme D è così fatto

Al tendere di $a \to \infty$

$\frac{\sqrt{y}}{a} \to$ asse y -



L'insieme D varia al variare del parametro a

Esercizio 2 (Vale 4 punti) APPELLO 30/6/04

Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y,z) = \cos x - \alpha y^2 - z^2 + z$$

ha almeno un punto di max. relativo?

Svolgimento

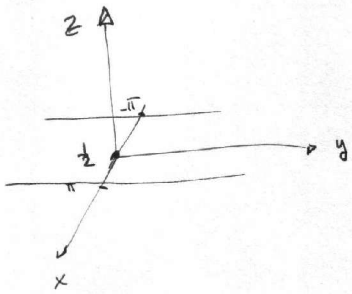
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x = 0 \iff x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\alpha y = 0 \iff \alpha = 0 \vee y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 - 2z = 0 \iff z = \frac{1}{2}$$

se $\alpha = 0 \Rightarrow$ y qualsiasi $\left(k\pi, y, \frac{1}{2}\right)$ sono fasci di rette // parallele per $z = \frac{1}{2}$

nel qual caso abbiamo ∞ punti che sono sia di max che di min.



se $\alpha \neq 0 \Rightarrow y = 0$ allora si ottengono i punti

$$\left(k\pi, 0, \frac{1}{2}\right)$$

ora $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad H\left(k\pi, 0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\det H = -4\alpha \cos x$ che è $\neq 0$ e $\quad -\cos x > 0$ se $x = (2k \pm 1)\pi$

↑ ad ogni

#

Esercizio 3 (4 punti) APPELLO 30/6/04

Determinare i massimi e i minimi di

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x^3 - y^2 + xy - y$$

Svolgimento

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -3x^2$$
da cui la 2ª diventa
$$6x^2 + x - 1 = 0$$

Allora $x_{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \begin{cases} \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-1-5}{12} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

I punti critici sono quindi

$A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H(A)) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow A \text{ non è né di max né di min}$$

$$\det(H(B)) = \det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 5 > 0 \quad e \quad -3 < 0 \Rightarrow B \text{ è di massimo relativo}$$

Esercizio 4 (8 punti) APPELLO 30/6/04

Dire se esistono max e min della funzione

$$f(x,y) = 2x-y$$

su $D = \{ (x,y) : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \}$

Svolgimento (Suff. guardare dove non si annulla il differenziale di f su D)

I pti di max o min sono nei punti interni di D ove si annulla df o su ∂D (*)

$\Downarrow \mathring{D}$

$$F(x,y,\lambda) = 2x - y - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2 - \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -1 - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda x = 4 \\ \lambda y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

se $\lambda \neq 0$ $x = \frac{4}{\lambda}$ $y = -\frac{1}{2\lambda}$

$$\frac{16}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$4\lambda^2 = 17 \qquad \boxed{\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}}$$

Da cui

se $\lambda = \frac{\sqrt{17}}{2}$ $A = \left(\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\lambda = -\frac{\sqrt{17}}{2}$ $B = \left(-\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$$f(A) = \frac{17}{\sqrt{17}} \qquad f(B) = -\frac{17}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \max f = \frac{17}{\sqrt{17}} \qquad \min f = -\frac{17}{\sqrt{17}}$$

(*) Osservo che $\forall (x,y) \in \mathring{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \Rightarrow$ su $\mathring{D}$, df non è mai nullo — I punti di max e min sono da ricercarsi su ∂D

Esercizio 4 (Vale ? punti)

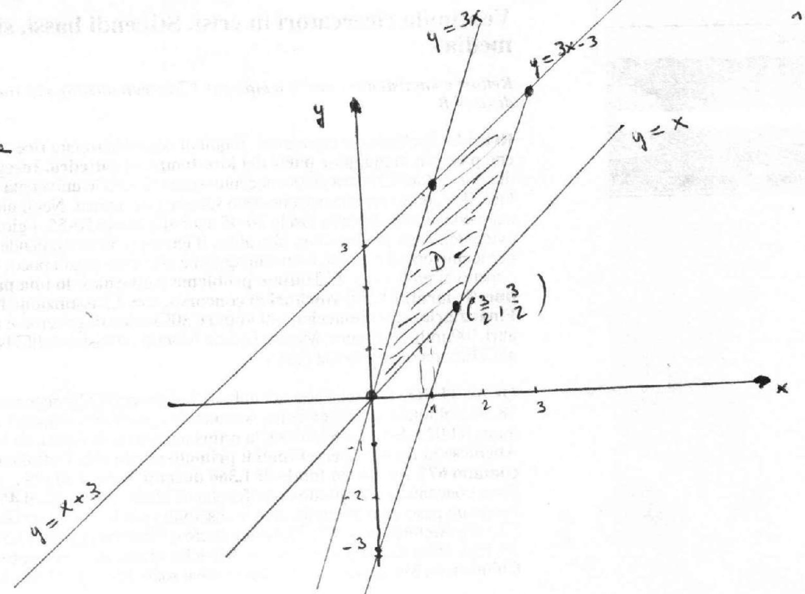
Calcolare $\displaystyle\iint_D (x-y)^2 \sin(3x-y)\,dx\,dy$

con $D = \{ (x,y) : \quad x \le y \le x+3 \quad , \quad 3x-3 \le y \le 3x \}$

(Suggerisce la sostituzione $3x - y = u \quad , \quad x - y = v$) $\rightarrow$ che è quella suggerita dalla funzione integranda

Svolgimento

D è l'insieme

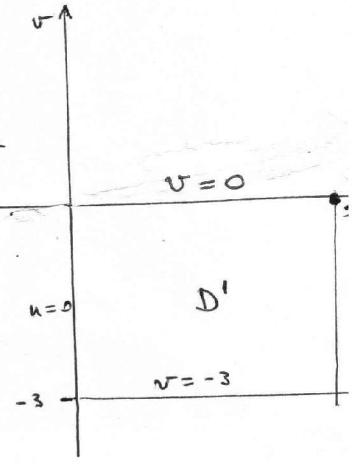


Ora dalla sostituzione $u = 3x - y$ e $v = x - y$ si ottiene

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u - \frac{3}{2}v \end{cases}$$

che trasforma D in un dominio D' della forma quadrata

Infatti i lati di D vengono mandati come segue



1) $y = x \quad 0 \le x \le \frac{3}{2}$

diventa

$\cancel{\frac{1}{2}u} - \frac{3}{2}v = \cancel{\frac{1}{2}u} - \frac{1}{2}v \Rightarrow \boxed{v = 0}$

2) $y = 3x - 3 \qquad 3 \le x \le 9/2$

$\frac{1}{2}u - \cancel{\frac{3}{2}v} = \frac{3}{2}u - \cancel{\frac{3}{2}v} - 3$

$\boxed{3 = u}$

3) $y = x + 3 \qquad \cancel{\frac{1}{2}u} - \frac{3}{2}v = \cancel{\frac{1}{2}u} - \frac{1}{2}v + 3$

$-v = 3 \quad \boxed{v = -3}$

4) $y = 3x$

$$\frac{1}{2}u - \cancel{\frac{3}{2}v} = \frac{3}{2}u - \cancel{\frac{3}{2}v} \quad \Rightarrow \boxed{u=0}$$

Allora l'integrale diventa

$$\iint_{D'} v^2 \sin u \, \underset{|J_{uv}|}{\uparrow} du\, dv = \int_0^3 \int_{-3}^0 2v^2 \sin u \, du\, dv$$

$$\text{con} \quad J_{uv} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+1 = -2$$

$$\int_0^3 \int_{-3}^0 2v^2 \sin u \, du\, dv = \int_0^3 \sin u \left(\int_{-3}^0 2v^2 dv \right) du$$

$$= \int_0^3 \sin u \left[\frac{2}{3} v^3 \right]_{-3}^0 du = \int_0^3 \sin u \frac{2}{\cancel{3}} (-\cancel{27}^{\,9}) \, du$$

$$= -18 \int_0^3 \sin u = -18 \left(-\cos u\right)_0^3 = 18(\cos 3 - 1)$$

Esercizio 8 (4 punti) Appello del 30/6/04

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin x \, e^{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Si può procedere per separazione di variabili ovvero

$$\int_0^y e^{-t}\,dt = \int_0^x \sin t\,dt$$

$$-\left(e^{-t}\right)_0^y = -\left[\cos t\right]_0^x$$

$$-1 + e^{-y} = \cos x - 1$$

$$\boxed{e^{-y} = \cos x} \implies \cos x > 0$$ (la costante d'integrazione vale 0 se si integra al solito modo)

Allora

$$\log e^{-y} = \log \cos x$$

$$\boxed{y(x) = -\log(\cos x)}$$

$\cos x > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Poiché 0 appartiene al dominio $\implies$ $\boxed{x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.}$ è l'intervallo dove possiamo considerare definita la soluzione