IMPORTANTE:
Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTO FOGLIO** indipendentemente dall'esito della prova. Il foglio va inserito nell'elaborato anche nel caso, si barri la casella "Ritirato" accanto alla firma.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA 1 (B)

19 dicembre 2011

Compito A

Cognome e nome (stampatello): ....

Firma .... Ritirato □

RISERVATO ALLA COMMISSIONE
Voto:

FIRMA per accettazione del voto e consenso alla registrazione
N.B.: da firmare **solo** dopo aver preso visione della correzione e **davanti al/alla docente**

....

Compito A

Esercizio 1 È data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{|x| - 1}$$

a) f ha un punto di minimo?

b) f ha punti a tangente verticale?

c) f ha un punto di massimo relativo in $x = 1$?

a) f si può applicare il teorema di Lagrange in $[-1/3, 1/3]$?

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan(x - 3) - \sqrt{\frac{x}{2}}$$

a) Determinare il dominio di $f(x)$.

b) Calcolare i limiti fondamentali, ovvero nei punti di accumulazione e agli estremi del dominio

c) Determinare gli eventuali asintoti.

d) Determinare l'insieme B dei punti nei quali f risulta derivabile e calcolare $f'(x)$ per ogni $x \in B$.

e) Si determinino gli intervalli di monotonia di $f(x)$.

f) Si determinino gli eventuali punti di massimo e/o di minimo relativo (ed assoluto).

g) Tramite lo studio di $f''(x)$ si determini la concavità e la convessità di $f(x)$ nonché la presenza di eventuali punti di flesso.

h) Si tracci il grafico di f.

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sin(x^4) - e^{x^3}\right)}{\log^3(x + 1) - (x - 1)^5 - e^x}$$

Che valore assume il limite se nel numeratore si sostituisce $\sin(x^4)$ con $\sin(x)$ e a denominatore e^x con e^{x^3}?

Indicazioni sulle soluzioni

Esercizio 1 Anzitutto la funzione è definita su $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ e vale

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-1} & x \geq 0 \\ \\ \frac{-e^x}{x+1} & x \leq 0. \end{cases}$$

con derivata prima

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} & x \geq 0 \\ \\ \frac{-xe^x}{(x+1)^2} & x \leq 0. \end{cases}$$

Pertanto si ha

- la funzione è continua in 0
- la funzione non è derivabile in 0, ma nel punto $x = 0$ la funzione ha un massimo locale (vedi Figura 1)
- i punti 1 e -1 sono asintoti verticali (non punti di flesso o a tangente verticale!) e ovviamente **non** possono essere punti estremali (massimo o minimo)
- ha un punto di minimo in $x = 2$, mentre per $x < -1$ decresce verso 0 velocemente per $x \to +\infty$ la funzione va all'infinito.
- infine, il teorema di Lagrange si può applicare in ogni intervallo che non include lo zero, dove la funzione risulta non derivabile. Quindi in [1/2,2/3] sì ma non in [-1/3,1/3].

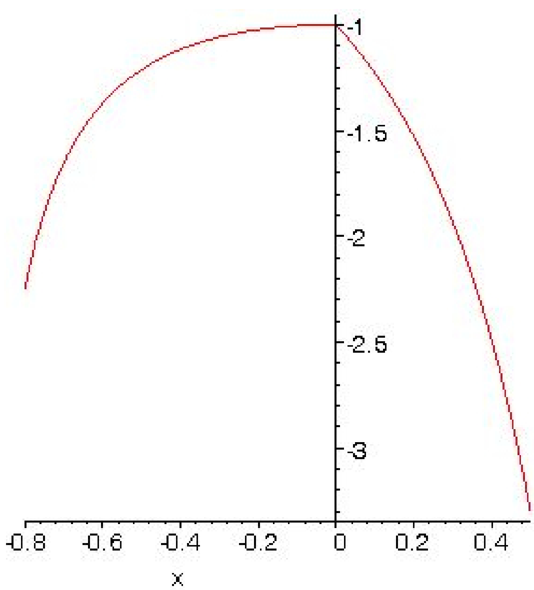

Figure 1: La funzione dell'esercizio 1 nell'intervallo [-0.8, 0.5]

Esercizio 2 La funzione data è definita su tutti i reali maggiori o uguali a zero, ovvero $[0, +\infty)$ poiché arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $\sqrt{x/2}$ per $[0, +\infty)$. Limiti fondamentali $\lim_{x \to 0+} f(x) = \arctan(-3) = -\arctan(3) < 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi/2 - \infty = -\infty$. La funzione non ha asintoti né verticali, né orizzontali e né obliqui. Quando $f(x) = 0$? Se e solo se $(\arctan(x-3))^2 = x/2$ ovvero mai. Significa che la funzione non interseca mai l'asse delle ascisse.

Vediamo i punti di massimo e minimo.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+(x-3)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} = 0$ se e solo se $(x-3)^2 = 1 - 2\sqrt{2x}$. Si tratta dell'intersezione della parabola $(x-3)^2$ con il ramo d'iperbole $1 - 2\sqrt{2x}$. Tale intersezione da origine a 2 punti $a_1 \approx 3/2$ e $a_2 \approx 11/2$.

Ora, $f''(x) = -2(1+(x-3)^2)^{-2}(x-3) + \dfrac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{x^3}}$. Facilmente si verifica che $f''(a_1) > 0$, punto di minimo locale e $f''(a_2) < 0$ punto di massimo assoluto.

Pertanto la funzione decresce in $[0, a_1]$, cresce tra $[a_1, a_2]$ e decresce per $x > a_2$.

Il grafico della funzione in [0,15] é visibile in Figura 2.

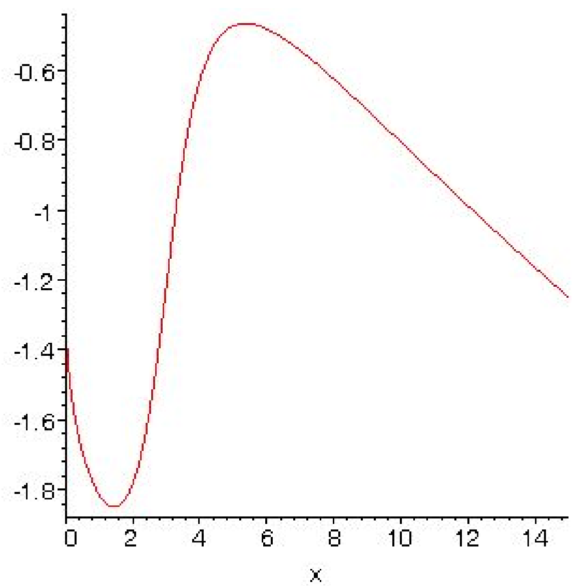

Figure 2: La funzione dell'esercizio 2 nell'intervallo [0, 15]

Esercizio 3 Il limite è una forma indeterminata 0/0. Applicando de l'Hopital si ottiene il risultato 1/6.

Si noti che analogo risultato si ottiene usando le espansioni di MacLaurin delle funzioni elementari coivolte usando

$$\begin{array}{rcl}
\sin(x^4) & \approx & x^4 + o(x^4) \\
\exp(x^3) & \approx & 1 + x^3 + o(x^3) \\
\log^3(x+1) & \approx & (x + o(x))^3 \\
(x-1)^5 & \approx & 1 - 5x + o(x) \\
\exp(x) & \approx & 1 + x + o(x)
\end{array}$$

ottenendo $\lim_{x\to 0} \frac{x(x^3 - 1 - x^3 + o(x^3))}{x^3 + o(x^3) + 1 - 5x + o(x) - 1 - x - o(x)}$ raccogliendo a denominatore x si conclude. Con la sostituzione richiesta e ragionando analogamente si ottiene $1/5$.