IMPORTANTE:
Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTO FOGLIO** indipendentemente dall'esito della prova. Il foglio va inserito nell'elaborato anche nel caso, si barri la casella "Ritirato" accanto alla firma.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA 1 (B)

19 dicembre 2011

Compito B

Cognome e nome (stampatello): ....

Firma .... Ritirato □

RISERVATO ALLA COMMISSIONE
Voto:

FIRMA per accettazione del voto e consenso alla registrazione
N.B.: da firmare **solo** dopo aver preso visione della correzione e **davanti al/alla docente**

....

Compito B

Esercizio 1 È data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{|x| - 1}$$

a) f ha un punto di massimo relativo in $x = 0$?

b) f è derivabile in $x = 0$?

c) f ha un punto di minimo relativo in $x = 1$?

d) Si può applicare il teorema di Lagrange in $[1/2, 2/3]$?

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(|x| - 3) - \sqrt{|x|}$$

a) Determinare il dominio di $f(x)$.

b) Calcolare i limiti fondamentali, ovvero nei punti di accumulazione e agli estremi del dominio

c) Determinare gli eventuali asintoti.

d) Determinare l'insieme A dei punti nei quali f risulta derivabile e calcolare $f'(x)$ per ogni $x \in A$.

e) Si determinino gli intervalli di monotonia di $f(x)$.

f) Si determinino gli eventuali punti di massimo e/o di minimo relativo (ed assoluto).

g) Tramite lo studio di $f''(x)$ si determini la concavità e la convessità di $f(x)$ nonché la presenza di eventuali punti di flesso.

h) Si tracci il grafico di f.

Esercizio 3 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 - \cos(x^4) + e^{x^3}\right)}{\log^3(x+1) - (x-1)^5 - e^x}$$

Che valore assume il limite se nel numeratore si sostituisce $\cos(x^4)$ con $\cos(2x)$ e a denominatore e^x con e^{8x^3}?

Indicazioni sulle soluzioni

Esercizio 1 Anzitutto la funzione è definita su $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ e vale

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-1} & x \geq 0 \\ \\ \frac{-e^x}{x+1} & x \leq 0. \end{cases}$$

con derivata prima

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} & x \geq 0 \\ \\ \frac{-xe^x}{(x+1)^2} & x \leq 0. \end{cases}$$

Pertanto si ha

- la funzione è continua in 0
- la funzione non è derivabile in 0, ma nel punto $x = 0$ la funzione ha un massimo locale (vedi Figura 1)
- i punti 1 e -1 sono asintoti verticali (non punti di flesso o a tangente verticale!) e ovviamente **non** possono essere punti estremali (massimo o minimo)
- ha un punto di minimo in $x = 2$, mentre per $x < -1$ decresce verso 0 velocemente, per $x \to +\infty$ la funzione va all'infinito.
- infine, il teorema di Lagrange si può applicare in ogni intervallo che non include lo zero, dove la funzione risulta non derivabile. Quindi in [1/2,2/3] sì ma non in [-1/3,1/3].

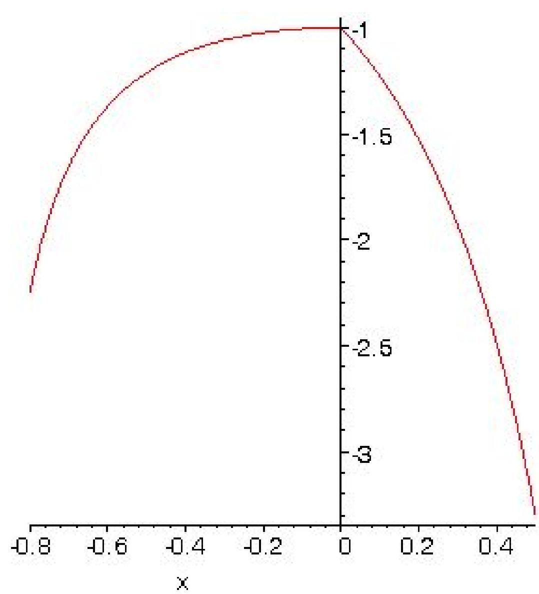

Figure 1: La funzione dell'esercizio 1 nell'intervallo [-0.8, 0.5]

Esercizio 2 La funzione data è pari e complessivamente la funzione è definita nell'unione delle semirette $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Possiamo limitarci a studiare la funzione $f(x)$ per $x > 3$ ovvero $f(x) = \log(x-3) - \sqrt{x}$.

$f(x) = 0$ se e solo se $\log(x-3) = \sqrt{x}$, ovvero mai. Vediamo i limiti notevoli $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 3+} f(x) = -\infty$. Questo limiti, assieme al fatto che la funzione non interseca mai le ascisse, dice che la funzione é sempre negativa.

$f'(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ se e solo se $x^2 - 10x + 9 = (x-1)(x-9) = 0$. Il punto $x = 9$ è un punto estremale (x=1 si esclude non essendo nell'insieme di definizione). Dai limiti precedenti potremmo già concludere che si tratta di un massimo.

Calcoliamo la derivata seconda. $f''(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^3} - \dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$ e $f''(9) < 0$, confermando il fatto che $x = 9$ è punto di minimo. Inoltre $f(9) = log(6) - 3 \approx -1.21$. Inoltre $f''(x) = 0$ se e solo se $-\dfrac{4\sqrt{x^3} + (x-3)^3}{4(x-3)\sqrt{x^3}} = 0$. Ció non accade mai. Non si sono flessi.

Il grafico della funzione in [3,20] é visibile in Figura 2.

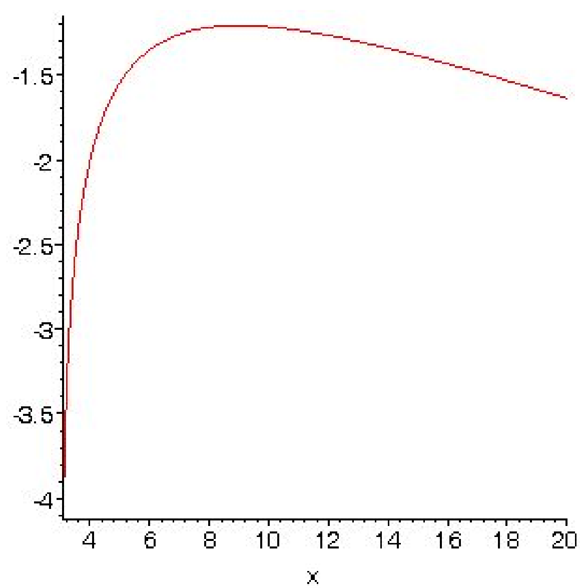

Figure 2: La funzione dell'esercizio 2 nell'intervallo [3, 20]

Esercizio 3 Il limite è una forma indeterminata 0/0. Applicando de l'Hopital si ottiene il risultato $-1/6$.

Analogo risultato si ottiene usando le espansioni di MacLaurin delle funzioni elementari coivolte usando

$$\begin{aligned}
1-\cos(x^4) &\approx x^8/2+o(x^8)\\
\exp(x^3) &\approx 1+x^3+x^6/2+o(x^6)\\
\log^3(x+1) &\approx (x+o(x))^3\\
(x-1)^5 &\approx 1-5x+o(x)\\
\exp(x) &\approx 1+x+o(x)
\end{aligned}$$

ottenendo $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(x^8/2+1+x^3+x^6/2+o(x^6))}{x^3+o(x^3)+1-5x+o(x)-1-x-o(x)}$ raccogliendo a $x$denominatore si conclude. Con la sostituzione richiesta e ragionando analogamente si ottiene $-1/5$.