IMPORTANTE:
Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTO FOGLIO** indipendentemente dall'esito della prova. Il foglio va inserito nell'elaborato anche nel caso, si barri la casella "Ritirato" accanto alla firma.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA 1 (B)

3 luglio 2012

Compito A

Cognome e nome (stampatello): ....

Firma ....   Ritirato ☐

RISERVATO ALLA COMMISSIONE
Voto:

FIRMA per accettazione del voto e consenso alla registrazione
N.B.: da firmare **solo** dopo aver preso visione della correzione e **davanti al/alla docente**

....

Compito A

Esercizio 1

a) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(5x))}{\mathsf{e}^{\sin(3x)}-1},$$

b) Quanto vale invece

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\sin(5x)+20\sin(x^2)\right)}{\mathsf{e}^{\sin(3x)}-1-2x}.$$

Esercizio 2

a) Si fornisca la definizione di punto di discontinuità eliminabile

b) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Si dica se $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile per f e si dica chi è un prolungamento continuo di f.

Esercizio 3

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right), \quad x \in [0,5].$$

a) Verificare che la funzione è definita e continua in $[0,5]$.

b) Si calcolino f' e f''.

c) Si determinino i punti di minimo e massimo relativo nonchè i punti di minimo e massimo assoluto in $[0,5]$.

d) Fare il grafico di $f(x)$ in $[0,5]$.

Indicazioni sulle soluzioni

Esercizio 1, **8 punti.**

(a) Il limite è una forma indeterminata 0/0. Si può procedere con de l'Hôpital oppure come segue. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sin 3x\ \cos 5x$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(5x))}{\sin(5x)} \frac{\sin(3x)}{\mathsf{e}^{\sin(3x)}-1} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$$

Ora, i primi due fattori hanno limite uguale ad 1, mentre il terzo vale 5/3 in quanto si è usato il fatto che $\sin(ax) \approx ax$ per $x \to 0$. Pertanto il risultato è 5/3.

(b) In questo caso usiamo le approssimazioni $\ln(1+t) \approx t$, $\mathsf{e}^t - 1 \approx t$ per $t \to 0$. Pertanto

$$\ln(1+\sin(5x)+20\sin(x^2)) \approx \sin(5x)+20x^2 \approx 5x+20x^2, \quad x \to 0\,,$$

$$e^{\sin(3x)} - 1 - 2x \approx \sin(3x) - 2x \approx 3x - 2x = x, \quad x \to 0\,.$$

Quindi calcolare il limite richiesto è equivalente a

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x+20x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 5 + 20x = 5\,.$$

Esercizio 2, **8 punti**.

(a) Un punto x_0 del dominio di f per cui

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \neq f(x_0)$$

si dice di discontinuità eliminabile poiché f si puó prolungare con

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}\,.$$

g è un *prolungamento per continuità* di f in x_0 (g risulta quindi continua in x_0).

(b) f è discontinua in $x=1$. Per $x \to 1$, $\cos(1/(x-1))$ oscilla tra -1 e 1 mentre $x-1$ va a zero. Essendo

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0\,.$$

mentre la f non è definita in $x=1$. Ma $x=1$ è un punto di discontinuità eliminabile poiché

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

è il suo prolungamento per continuitá in $x=1$.

Esercizio 3, **14 punti**.

(a) La funzione è definita in $(-1, +\infty)$, ivi continua essendo composta di funzioni continue. Pertanto in $[0, 5]$ la funzione è definita e continua. Nota: $f(x) = 0$ solo per $x = 1$.

(b)

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$f''(x) = \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$$

(c) Osservo che $f'(0) = 1 > 0$, $f'(5) = -17/78 < 0$ che ci dicono che $x = 0$ é un punto di minimo relativo con $f(0) = 0$ e $x = 5$ é pure punto di minimo con $f(5) = \ln(3/13) < 0$. Inoltre $f'(x) = 0$ se e solo se $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Solo $x_2 = \sqrt{2} - 1$ appartiene all'intervallo $[0, 5]$. x_2 é punto di massimo in quanto per $x \in [x_1, x_2]$ la derivata prima risulta essere positiva, quindi f crescente. Inoltre $f''(x_2) < 0$ quindi x_2 é effettivamente di massimo e $f(x_2) = \ln(1/(2x_2)) > 0$. Tale massimo é assoluto poiché la funzione in $[0, 5]$ risulta assumere valori sempre minori di $f(x_2)$.

Riassumendo: f ha due minimi, in $x = 0$ (relativo) e in $x = 5$ (assoluto). Ha un solo punto di massimo assoluto per $x = x_2$.

Nota: eventuali flessi si ricavano risolvendo $f''(x) = 0$. Solo per completezza, anche se non era richiesto dal testo, facciamo vedere che effettivamente c'era un flesso dove la funzione cambia la concavitá. Infatti, guardando al numeratore di $f^{(2)}(x)$ (il denominatore risulta invece sempre positivo) si osserva che in 1 vale $-4 < 0$, mentre in $3/2$ vale circa $5 > 0$. Quindi esiste un $\alpha \in (1, 3/2)$ dove la funzione cambia la concavitá. Questo lo si vede bene dal grafico.

(d) Grafico

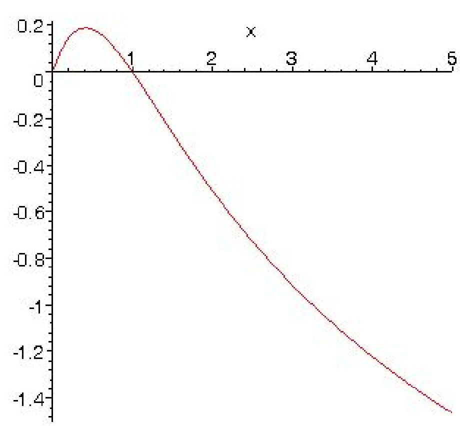

Figure 1: Grafico in $[0, 5]$ della funzione dell'esercizio 3 .