IMPORTANTE:
Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTO FOGLIO** indipendentemente dall'esito della prova. Il foglio va inserito nell'elaborato anche nel caso, si barri la casella "Ritirato" accanto alla firma.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA 1 (B)
3 luglio 2012
Compito B

Cognome e nome (stampatello): ....

Firma .... Ritirato □

RISERVATO ALLA COMMISSIONE
Voto:

FIRMA per accettazione del voto e consenso alla registrazione
N.B.: da firmare **solo** dopo aver preso visione della correzione e **davanti al/alla docente**

....

Compito B

Esercizio 1

a) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\mathsf{e}^{-x}+\ln\left(\frac{9x^3+\sin x-1}{x^3+\sin 5x-\frac{3}{10}}\right)\right],$$

b) Quanto vale lo stesso limite ma per $x \to 0$?

c) Se indichiamo con l_1 il limite al punto a) e con l_2 il limite al punto b), quale fra le seguenti disuguaglianze vale: $l_1 < l_2$ o $l_1 \geq l_2$? Motivare la risposta.

Esercizio 2

a) Si fornisca la definizione di punto di discontinuità di prima specie

b) Si consideri la funzione
$$f(x)=\left(1-\mathsf{e}^{\frac{x+1}{x}}\right)^{-1}.$$
Si dica se $x=0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Si calcoli inoltre il salto di discontinuità di f in $x=0$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione
$$f(x)=(1-x^3)\mathsf{e}^{-x^3},\quad x\in[-1,3].$$

a) Verificare che la funzione è definita e continua in $[-1,3]$.

b) Si calcolino f' e f''.

c) Si determinino i punti di minimo e massimo relativo, i punti di minimo e massimo assoluto in $[-1,3]$ nonché eventuali punti di flesso.

d) Fare il grafico di $f(x)$ in $[-1,3]$.

Indicazioni sulle soluzioni

Esercizio 1, **8 punti**.

(a) Sapendo che $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{9x^3+\sin x-1}{x^3+\sin 5x-\frac{3}{10}}\right) = \ln\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3}\left(\frac{9+\sin x/x^3-1/x^3}{1+\sin 5x/x^3-\frac{3}{10x^3}}\right)\right] = \ln 9$$

Poniamo $l_1 = \ln 9 \approx 2.19$.

(b) per $x \to 0$ le cose sono ancor piú semplici ottenendo il valore $l_2 = 1 + \ln(\frac{10}{3}) \approx 2.2$.

(c) vale $l_1 < l_2$. Infatti

$$\begin{array}{rcl} \ln 9 & < & \ln e + \ln 10 - \ln 3 \\ \ln\left(\dfrac{3}{e}\right) & < & \ln\left(\dfrac{10}{9}\right) \end{array}$$

poiché, essendo la funzione logaritmo naturale strettamente crescente su $\mathbb{R}$, essa è quindi invertibile pure su $\mathbb{R}$, quindi $\frac{3}{e} < \frac{10}{9}$, ovvero $27 < 27.172$.

Esercizio 2, **8 punti**.

(a) Una funzione f che in x_0 è tale che

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_- \neq l_+ = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

si dice che ha in x_0 un punto di *discontinuità di prima specie* con *salto* $s = l_+ - l_-$.

(b) La funzione data è discontinua in $x = 0$ ed in $x = -1$. Viene chiesto di stabilire la natura della discontinuità in $x = 0$. Ora essendo $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} = 0$, avremo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, con salto $s = 0 - 1 = -1$.

Esercizio 3, **14 punti.**

(a) La funzione data è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ poiché prodotto di funzioni continue in $\mathbb{R}$, pertanto lo sarà nell'intervallo $[-1, 3]$.

(b) Derivate

$$f'(x) = 3x^2(x^3-2)\mathrm{e}^{-x^3}$$

$$f''(x) = -3x(4-11x^3+3x^6)\mathrm{e}^{-x^3}$$

Osservo che $f'(1) = -9e < 0$ e $f'(3) = 675e^{-27} > 0$. Pertanto $x = -1$ è un massimo relativo con $f(-1) = 2e$ e $x = 3$ è un minimo realtivo con $f(3) = -26e^{-27}$.

(c) Risolvo $f'(x) = 0$, otteniamo che $x = 0$ e $x = \sqrt[3]{2}$ sono punti estremali. Essendo $f''(0) = 0$, scopriamo che $x = 0$ è un punto di flesso, mentre $f''(\sqrt[3]{2}) > 0$ ovvero $x = \sqrt[3]{2}$ é di minimo.

Osservo inoltre che la derivata seconda si annulla anche dove si annulla il polinomio $3x^6 - 11x^3 + 4$, ovvero nei punti $\alpha_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{11+\sqrt{73}}{6}}$ che risultano pertanto degli ulteriori flessi.

Riassumo: $x = \sqrt[3]{2}$ è di minimo assoluto; $x = -1$ è di massimo assoluto; flessi in $x = 0$ e in $\alpha_{1,2}$.

(d) Grafico di $f(x)$ in $[-1, 3]$.

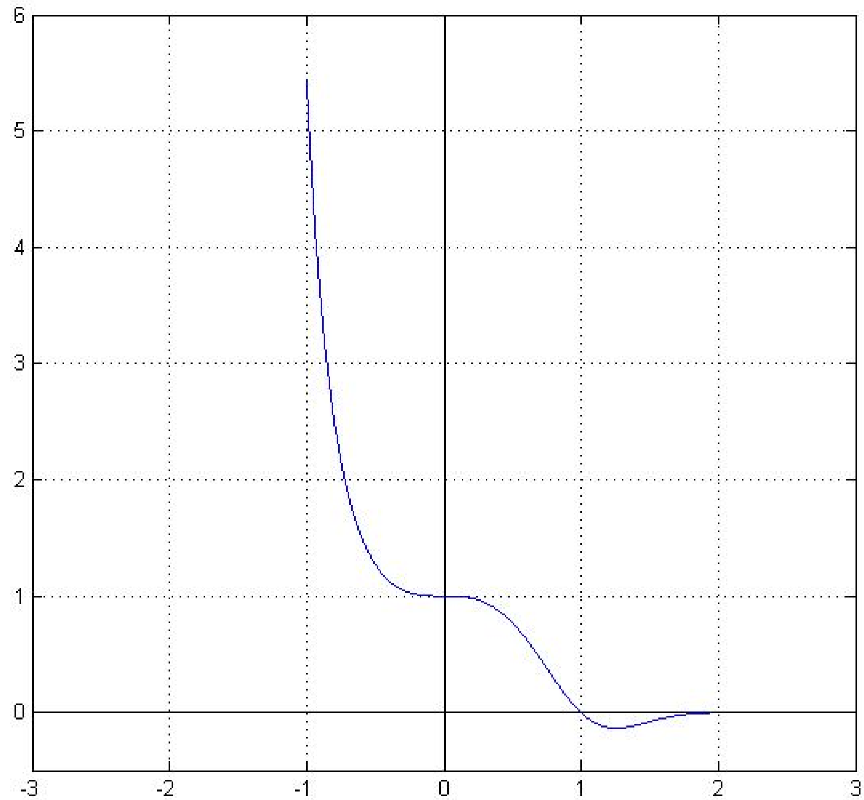

Figure 1: La funzione dell'esercizio 3.