IMPORTANTE:
Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTO FOGLIO** indipendentemente dall'esito della prova. Il foglio va inserito nell'elaborato anche nel caso, si barri la casella "Ritirato" accanto alla firma.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA 1 (B)

9 gennaio 2012

Compito A

Cognome e nome (stampatello): ....

Firma .... Ritirato □

RISERVATO ALLA COMMISSIONE
Voto:

FIRMA per accettazione del voto e consenso alla registrazione
N.B.: da firmare **solo** dopo aver preso visione della correzione e **davanti al/alla docente**

....

Compito A

Esercizio 1 Per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{4x^2-\lambda}-2x\right) = 3\,.$$

Esercizio 2 Data la funzione $f(x) = |x|\mathsf{e}^{\frac{x-1}{x}}$

a) f ha un asintoto verticale destro?

b) f ha asintoti obliqui?

c) f è continua in $x = 0$?

d) f ha un punto di minimo in $x = 0$?

e) Si studi la concavità e convessità e si faccia il grafico della funzione data.

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$f(x) = (2x - \sin x)\ln(1+3x)$$

a) Determinare lo sviluppo di MacLaurin di f arrestato al terzo ordine

b) Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di f rispetto all'infinitesimo campione

c) Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}$$

Esercizio 4 Dimostrare. Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$, allora esiste almeno un punto $\xi \in (a,b)$ per cui $f(\xi) = g(\xi)$.

Indicazioni sulle soluzioni

Esercizio 1 Vale 6 punti. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{4x^2-\lambda}+2x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}(4x^2-\lambda-4x^2)}{\sqrt{4x^2-\lambda}+2x}$$

raccogliendo nella radice del numeratore x^2 e in quella del denominatore $4x^2$ e li portiamo fuori dalla radice, poiché stiamo calcolando a $+\infty$, avremo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\,\lambda\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2x\left(\sqrt{1-\frac{\lambda}{4x^2}}+1\right)}=-\frac{\lambda}{4}=3\,.$$

Pertanto $\lambda=-12$.

Esercizio 2 Vale 12 punti. Si tratta di studiare

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=x\,\mathsf{e}^{\frac{x-1}{x}} & x>0\\ \\ f_2(x)=-x\,\mathsf{e}^{\frac{x-1}{x}} & x<0\end{cases}$$

il cui dominio è $\mathbb{R}\setminus 0$.

(a) Vediamo i limiti fondamentali. $\lim_{x\to0^+}f_1(x)=0$, $\lim_{x\to0^-}f_2(x)=+\infty$, pertanto la funzione ha un asintoto verticale sinistro ma **non ha asintoto verticale destro**.
$\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f_2(x)=+\infty$.

(b) $\lim_{x\to+\infty}f_1(x)/x=\mathsf{e}$ e $\lim_{x\to+\infty}f_1(x)-\mathsf{e}x=-\mathsf{e}$. La retta $y_1(x)=\mathsf{e}x-\mathsf{e}$ risulta un asintoto obliquo. Analogamente $\lim_{x\to-\infty}f_2(x)/x=-\mathsf{e}$ e $\lim_{x\to-\infty}f_2(x)+\mathsf{e}x=\mathsf{e}$. La retta $y_2(x)=-\mathsf{e}x+\mathsf{e}$ risulta un asintoto obliquo.

(c),(d) f non essendo definita in 0, in quel punto non è continua e in quel punto non può assumere un minimo.

(e) Anzitutto

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=\ \mathsf{e}^{\frac{x-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ \\ f_2'(x)=\ -\mathsf{e}^{\frac{x-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} f_1''(x)=\ \frac{\mathsf{e}^{\frac{x-1}{x}}}{x^3}\\ \\ f_2''(x)=\ -\frac{\mathsf{e}^{\frac{x-1}{x}}}{x^3}\end{cases}$$

$f_1'(x)=0$ se e solo se $x=-1$, ma non essendo reale positivo, la condizione non si accetta. $f_2'(x)=0$ se e solo se $x=-1$, che è nel dominio di f_2 e potrebbe essere un candidato punto di minimo.

Inoltre $f_1'(x) \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$. Pertanto la funzione è sempre crescente. Guardando alla derivata seconda, si nota che $f_1''(x) > 0$ e $f_2''(x) > 0$ nel loro dominio, pertanto la funzione risulta essere sempre convessa. Infine $f_2''(-1) = 1 > 0$ confermando il fatto che la funzione ha un minimo in $x = -1$ con valore $f(-1) = \mathsf{e}^2$. Il grafico della funzione nei due sottointervalli $[-3, -0.3]$ e $[0.01, 2]$ si può vedere in Fig. 1.

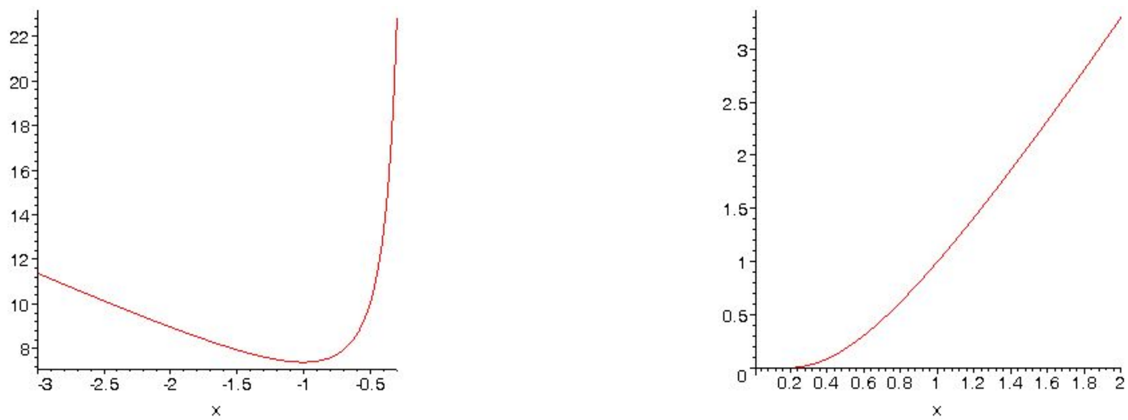

Figure 1: La funzione dell'esercizio 2. A sinistra nell'intervallo $[-3, -0.3]$, a destra in $[0.01, 2]$.

Esercizio 3 Vale 8 punti.

(a) $\sin(x) = x + o(x^2), \ \ \ln(1+3x) = 3x - (3x)^2/2 + o(x^2)$. Pertanto

$$f(x) = (2x - x - o(x^2))(3x - (3x)^2/2 + o(x^2)) = 3x^2 - \frac{9x^3}{2} + o(x^3), \quad x \to 0$$

(b) Per $x \to 0$, la parte principale è $p(x) = 3x^2$ e l'ordine d'infinitesimo è $\alpha = 2$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$.

(c) Ricordando che $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^3)$, da cui $1 - \cos(x) \sim x^2/2, \ x \to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos(x)} = 6\,.$$

Esercizio 4 Vale 4 punti. La dimostrazione si fa come segue. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$ che risulta continua essendo differenza di funzioni continue. Allora $h(a) = f(a) - g(a) < 0$ e $h(b) = f(b) - g(b) > 0$ e applicando il teorema degli zeri a $h(x)$, in [a,b] esiste almeno un punto ξ per cui $h(\xi) = f(\xi) - g(\xi) = 0$, ovvero $f(\xi) = g(\xi) \quad \square$.