IMPORTANTE:
Prima di uscire dall'aula, **CONSEGNARE QUESTO FOGLIO** indipendentemente dall'esito della prova. Il foglio va inserito nell'elaborato anche nel caso, si barri la casella "Ritirato" accanto alla firma.

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA 1 (B)

9 gennaio 2012

Compito B

Cognome e nome (stampatello): ....

Firma .... Ritirato □

RISERVATO ALLA COMMISSIONE
Voto:

FIRMA per accettazione del voto e consenso alla registrazione
N.B.: da firmare **solo** dopo aver preso visione della correzione e **davanti al/alla docente**

....

Compito B

Esercizio 1 Per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{9x^2-\lambda}-3x\right) = 4\,.$$

Esercizio 2 Data la funzione $f(x) = \ln\left(\mathsf{e}^{|x|}+x\right)$

a) f è derivabile in $x = 0$?

b) f ha asintoti obliqui?

c) f ha un punto di minimo in $x = 0$?

d) $x = 0$ è un punto di cuspide?

e) Si studi la concavità e convessità e tracciarne il grafico.

Esercizio 3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\mathsf{e}^{x^2}}{1-x^2} - 1$$

a) Determinare lo sviluppo di MacLaurin di f arrestato al quarto ordine

b) Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo di f rispetto all'infinitesimo campione

c) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x^2}{\sin^4(x)}$$

Esercizio 4 Dimostrare. Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$. Se $f_1(a) < f_2(a)$ e $f_1(b) > f_2(b)$, allora esiste almeno un punto $\xi \in (a, b)$ per cui $f_1(\xi) = f_2(\xi)$.

Indicazioni sulle soluzioni

Esercizio 1 Vale 6 punti. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{9x^2-\lambda}+3x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}(9x^2-\lambda-9x^2)}{\sqrt{9x^2-\lambda}+3x}$$

raccogliendo nella radice del numeratore x^2 e in quella del denominatore $9x^2$ e li portiamo fuori dalla radice, poiché stiamo calcolando a $+\infty$, avremo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\,\lambda\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{3x\left(\sqrt{1-\frac{\lambda}{9x^2}}+1\right)}=-\frac{\lambda}{6}=4\,.$$

Pertanto $\lambda=-24$.

Esercizio 2 Vale 12 punti. Si tratta di studiare

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=\ln(e^x+x) & x\geq 0\\ f_2(x)=\ln(e^{-x}+x) & x<0\end{cases}$$

il cui dominio è tutto l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Infatti $e^{|x|}+x>0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. La funzione risulta essere sempre ≥ 0 sul dominio.

Inoltre, la funzione è continua su tutto il dominio, $f(0)=0$ e $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$.

Calcoliamo f' e f''.

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}\\ \\ f_2'(x)=\frac{1-e^{-x}}{e^{-x}+x}\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} f_1''(x)=\frac{e^x(x-2)-1}{(e^x+x)^2}\\ \\ f_2''(x)=\frac{e^{-x}(x+2)-1}{(e^{-x}+x)^2}\end{cases}$$

(a), (d) Essendo $f'(0^+)=f_1'(0)=2$ e $f'(0^-)=f_2'(0)=0$, in $x=0$ la funzione non è derivabile e il punto $x=0$ risulta un `punto angoloso`.

(b) Per $x\geq 0$: $\lim_{x\to\infty}f_1(x)/x=1$ e $\lim_{x\to+\infty}f_1(x)-x=0$, la retta $y_1(x)=x$ è asintoto obliquo nel semiasse positivo.

Per $x<0$: $\lim_{x\to-\infty}f_2(x)/x=-1$ e $\lim_{x\to-\infty}f_2(x)-x=0$, la retta $y_2(x)=-x$ è asintoto obliquo nel semiasse negativo.

(c) Ora facilmente si verifica che $f_1'(x)>0$, $f_2'(x)\geq 0$ che si annulla se e solo se $x=0$. Quindi f risulta essere sempre crescente per $x>0$ e sempre decrescente per $x<0$. Pertanto in $x=0$ si ha un punto di minimo che risulta il minimo assoluto. Inoltre, come ulteriore verifica si ha $f_2''(0)=1>0$.

(e) Per $x \geq 0$, $f_1'' \geq 0$ se e solo se $e^x(x-2) \geq 1$ ovvero si tratta di capire quando $e^{-x} \leq x - 2$. Esiste un valore $\alpha \approx 2.2$ per cui la funzione si annulla. Tale punto sarà un punto di flesso e la funzione da concava diventa convessa (vedasi Fig. 1 per il grafico di $e^{-x} - (x-2)$ in $[0, 3]$).

Per $x < 0$. In maniera analoga, si osserva che il numeratore di f_2'' si annulla in un punto β soluzione di $e^x = x + 2$, con $\beta \approx -1.8$. Pertanto, la funzione per $\beta \leq x \leq 0$ è convessa poi concava.

Il grafico della funzione data in $[-10, 10]$ è riportato in Fig. 2. Si noti come la funzione si avvicina agli asintoti $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

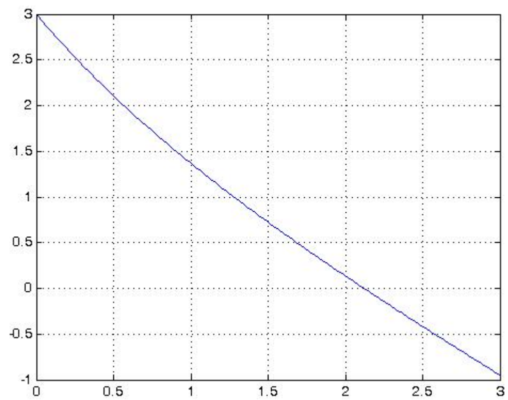

Figure 1: Grafico di $e^{-x} - (x-2)$ in $[0, 3]$]

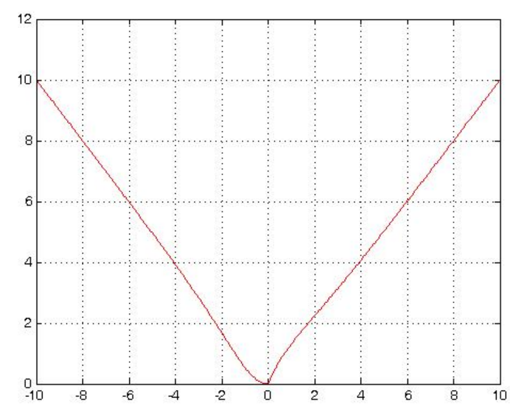

Figure 2: Grafico di $f(x)$ in $[-10, 10]$]

Esercizio 3 Vale 8 punti.

(a) Per $x \to 0$, la funzione data si può scrivere come segue arrestandosi al quart'ordine:

$$\frac{1}{1-x^2}\mathsf{e}^{x^2}-1=(1+x^4/2+o(x^4))(1+x^2+x^4+o(x^4))-1=x^2+\frac{3}{2}x^4+o(x^4)$$

(b) Per cui $p(x) = x^2$ e l'ordine d'infinitesimo è 2 rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = x$.

(c) Ora $f(x) - x^2 \sim \frac{3}{2}x^4$ e $\sin^4(x) \sim x^4$, quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x^2}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^4}{x^4}=\frac{3}{2}\,.$$

Esercizio 4 Vale 4 punti. La dimostrazione si fa come segue. Sia $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ che risulta continua essendo differenza di funzioni continue. Allora $h(a) = f_1(a) - f_2(a) < 0$ e $h(b) = f_1(b) - f_2(b) > 0$ e applicando il teorema degli zeri a $h(x)$, in [a,b] esiste almeno un punto ξ per cui $h(\xi) = f_1(\xi) - f_2(\xi) = 0$, ovvero $f_1(\xi) = f_2(\xi)$ $\square$.