

LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

Laurea in magistrale in Astronomia

Esercitazione sulla quadratura numerica

Prof. Stefano De Marchi

Padova, 30 novembre 2012

1 Formule dei trapezi e di Simpson

Per il calcolo approssimato di integrali definiti, abbiamo visto due metodi importanti: la *formula dei trapezi* e il *metodo di Simpson*. Per entrambi i metodi, che sono di tipo *interpolatorio*, si sono viste sia la forma *semplice* che quella *composita*. Se indichiamo con $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, e con $I_T(f)$, $I_T^c(f)$, $I_S(f)$ e $I_S^c(f)$ le corrispondenti formule di quadratura semplici e composite, valgono le formule seguenti.

- Formula dei trapezi e relativo errore.

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) ,$$

$$E_T(f) = I(f) - I_T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) , \quad \xi \in (a, b).$$

- Formula dei trapezi composta (o trapezoidale) e relativo errore. Qui dobbiamo prendere una suddivisione equispaziata di $[a, b]$ del tipo $\{x_0 = a, \dots, x_i = a + ih, \dots, x_n = b\}$, con $h = (b-a)/n$:

$$I_T^c(f) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) ,$$

$$E_T^c(f) = I(f) - I_T^c(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) , \quad \xi \in (a, b).$$

- Formula di Simpson e relativo errore.

$$I_S(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) ,$$

$$E_S(f) = I(f) - I_S(f) = -\frac{1}{24} \frac{(b-a)^5}{32} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b), \quad h = (b-a)/2.$$

- Formula di Simpson composta e relativo errore. Qui prendiamo, come nel caso dei trapezi, una suddivisione equispaziata di $[a, b]$. Quindi nel generico intervallo $I_k =$

$[x_{k-1}, x_k]$, consideriamo come punti di interpolazione $x_{k-1}, \bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ e x_k . Posto $h = (b - a)/n$:

$$I_S^c(f) = \frac{h}{6} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k)] ,$$

$$E_S^c(f) = I(f) - I_S^c(f) = - \left(\frac{b-a}{180} \right) \frac{h^4}{16} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) .$$

Esercizio 1. Si calcoli numericamente

$$\int_0^{2\pi} x e^{-x} \cos 2x dx = \frac{3(e^{-2\pi} - 1) - 10\pi e^{-2\pi}}{25} \approx -0.122122604618968 ,$$

mediante le *formule composite* dei trapezi e di Simpson,

1. Determinare *a priori* il numero di punti necessari affinché gli errori assoluti $E_T^c(f)$ e $E_S^c(f)$ siano in modulo minori $\text{tol} = 1.e - 6$.
2. Determinare anche l'errore assoluto rispetto al valore esatto.

2 Formula di Gauss-Legendre.

La formula di quadratura di *Gauss-Legendre* si può esprimere

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(z_i) . \quad (1)$$

ove, il vettore dei nodi \mathbf{z} e dei pesi \mathbf{w} si possono determinare con la seguente M-function

```
function [z,w]=zwlegendre(n)
% This function computes nodes z and weights
% w of the Gauss-Legendre quadrature formula.
%-----
% Input:
%     n = number of quadrature nodes
% Outputs:
%     z = column vector of the nodes
%     w = column vector of the weights
%-----
if n<=1
    z=[0]; w=[2];
    return
end
A=zeros(n);k=[1:n-1]; v=k./(sqrt(4*(k.^2)-1));
A=A+diag(v,1)+diag(v,-1);
[w,z]=eig(A);
nm2=sqrt(diag(w'*w));
w=(2*w(1,:)).^2./nm2;
z=diag(z);
```

Esercizio 2 Calcolare l'integrale di

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos(x) dx \quad (2)$$

a meno di $\mathbf{tol} = 1.e - 9$ mediante la formula di Gauss-Legendre costruita prendendo $n = 2^i$, $i = 0, 1, \dots, imax = 8$ punti a meno di $\mathbf{tol} = 1.e - 9$ (ci si arresterà quando $n > 2^8$ oppure l'errore in modulo diventa minore di tol , assumendo come valore esatto quello che si ottiene con la funzione `quadl` a meno di $\mathbf{tol}=1.0e-9$).

Si chiede anche di calcolare l'integrale (2) con la formula di Gauss-Chebyshev-Lobatto i cui pesi e nodi sono

$$\begin{aligned} x_k &= \cos(k\pi/n), \quad k = 0, \dots, n \\ w_k &= \frac{\pi}{nd_k}, \quad d_0 = d_n = 2, \quad d_k = 1, \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$